MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA

TOMO II. PARTE II.

VERONA
PER DIONIGI RAMANZINI
MDCCLXXXIV.

NUOVA TEORIA

INTORNO AL MOVIMENTO DE' NAVIGLI A REMI

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

SArei ben alieno dal riprodurre queſt' argomento ſotto gli occhi de' dotti, ſe altro non aveſſero fruttato le mie meditazioni fuorchè un nuovo metodo di maneggiarlo, e una perfetta conformità con le ricerche altrui ne' finali riſultamenti. Non è già perchè non debba talora averſi in conto anche queſto profitto, e ne' caſi ſingolarmente in cui o la ſtrada onde giugnere al medeſimo fine è più breve, oppure, ſe qualche pratica vi ſi attenga, rieſce ella più ſemplice e più naturale; ma qualche volta e in alcuni caſi potrebbe giudicarſi abuſo del tempo il rifare le coſe fatte non con altro merito, che di averle rifatte in altra guiſa. Ma avendo riconoſciuto da gran tempo, che le indagini inſtituite fino a' dì noſtri intorno alla navigazione a remi non erano ancor giunte a ſcoprire e mettere in chiaro tutti i ſegreti del remigare, mi ſono ad altri principj appigliato, combinando la teoria col fatto, e facendo obbedire il calcolo al ragionamento e alle oſſervazioni, come nelle ſcienze fiſico-matematiche dee farſi. Il che tutt' altro eſſendo che rifare il fatto, vo' ben credere, che non giudicheranno i Geometri immeritevole totalmente della loro attenzione queſta nuova ricerca, la quale col ridurre l' argomento alla ſua legittima condizione, toglie di mezzo ogni oſcurità e controverſia, in cui reſtava tuttora involta queſta finiſſima parte della ſcienza del moto.

CAPITOLO I.

Introduzione.

§. 1. Attribuiſce *Plinio* nel Lib. 7. Cap. 56 l' invenzione de' remi agli abitanti di due città della Beozia, oggi

detta *Stramulipe* , i quali a ſuo dire diedero al remo il nome di κώπη , e alla pala, ch' è la parte larga, che percuote l' acqua, quello di πλάτη. Ma vuol ragione non men di *Plinio* autorevole, che ſi creda contemporaneo il remo al primo avventurarſi degli uomini a diſcorrere su' galleggianti per fiumi e laghi , e pel mare coſta a coſta , molto prima che foſſe chiamato in ſoccorſo il vento; eſpediente più tardo, il quale ſuppone già abituati gli uomini ne' primi cimenti del remigare , men perigliosi dell' andar a vela . V' ha qualche popolo ancora nella ſua originaria rozzezza, il quale facendo di sè puntello, rema con le pale nelle mani ſenza appoggiare il remo all' orlo della barca.

§. II.

Ma per quanto antica ſia queſt' arte di navigare , non ſo che prima di *Ariſtotele* ſi avviſaſſe alcun filoſoſo d' inveſtigare i principj ſu cui è fondata , e il modo di calcolare l' economia delle ſorze , che agiſcono in quella mirabile operazione. Il vulgo s' accheta nel travvedervi delle manovelle ordinarie in azione; quando realmente non s' ingeriſce tal natura d' ordigno, ove non ha luogo un punto ſiſſo, l' ipomoclio per la leva. E queſta è la ſorte ordinaria d' un' infinità di fenomeni familiari, in cui la dimeſtichezza coll' effetto fa credere triviale la cauſa, che lo produce; ed è poi ella da indagarſi più ardua e difficile, che non ſi eſtima. Ma l' illuſione giunge bene ſpeſſo a imporre anche agli uomini illuminati, ſinchè una fortunata rifleſſione non iſquarcia il velo, e laſcia ſcoprire la verità . In fatti troviamo nella 4. Quiſt. de' Meccan. , che *Ariſtotele* parlando dell' operar de' remi dice *hypomoclion fit ſcalmus, ſtat enim ille; pondus vero mare eſt, quod propellit remus; vectem autem movens ipse eſt remex* . Prende egli dunque il remo come un vette di primo genere, che non può eſſere; poichè ſarebbe neceſſario, che ſe ne ſteſſe immobile il navilio , affinchè agitandoſi dal rematore il remo ad un capo , e ſervendogli d' appoggio il navilio, aveſſe coll' altro a farſi l' impulſione dell' acqua , che ſecondo lui è il peſo da moverſi. Nè con maggior ſelicità ſono riuſciti a ſviluppare queſta quiſtione coloro, che hanno preteſo di ravviſarvi un vette di

secondo genere, come se l'acqua facesse figura di punto fisso, il che pure non è, non essendo ella altramente immobile, ancorchè resista di continuo all'impulsione del remo. Ma se vuol essere messo da parte il comune de' Meccanici, che si sono facilmente creduti fuor d'impaccio col ridurre all'azione delle leve l'atto del remare, merita riguardo e commemorazione ciò che n' hanno scritto alcuni de' più dotti e valenti uomini di questo secolo, in cui è asceso al più alto grado lo studio delle Meccaniche.

§. III.

Dopo il Sig. *Bouguer*, il quale nel suo eccellente libro, che ha per titolo *Traitè sur le Navire*, versa su questa materia con molta penetrazione, prese a farne singolar trattazione il Sig. *Eulero* nelle Mem. della Reale Società di Berlino per l'anno 1747. Sembrando a quest'illustre Geometra incerte ed oscure le azioni de' rematori, imperfetta la teoria di *Bouguer*, e non manifesta la forza, con cui il navilio è promosso immediatamente, abbandona ogni considerazione propria e peculiare della cosa, e tutto si rivolge alle prime leggi della Dinamica. Con queste cerca prima di stabilire la relazione tra lo spazio percorso nel moto accelerato, cominciando dalla quiete, e la velocità acquistata finalmente, in modo però astratto sì che l' operar de' remi non v' entra per alcun conto. Passa quindi, dopo molte discussioni e rettificazioni, a trattare del moto uniforme del navilio. Di due equazioni, a cui si riduce, una è legittimamente dedotta. Ma intorno all' altra può ragionevolmente dubitarsi, se sia lecito il prendere per punto fisso la sponda del navilio, che non è assolutamente, e ch' egli medesimo rigetta nell' Introduzione; mentre l' uguagliare ch' ei fa nel moto uniforme (§. XXI. pag. 195.) il momento della forza intorno a questo punto col momento della resistenza al centro della pala, abilita il punto in questione tacitamente a far figura d' ipomoclio. Ad ogni modo è piena quella Memoria di bellissime considerazioni, e vi si scorge ad ogni passo l' ingegno sommo del Geometra in lotta con le difficoltà gravissime dell' argomento. Non è a mia cognizione, che dopo di lui sia stata presa questa materia da' suoi prin-

cipj, e affrontata in tutte le sue parti, come l' indole della cosa il richiede. Ne parlò per incidenza e alla sfuggita ne' suoi Opuscoli il celebre Sig. d' *Alembert*, e riportossi alla Memoria sopraddetta del Sig. *Eulero*. Nel 1753 fu coronata dall' Accademia Reale di Parigi una Memoria dell' illustre Sig. Daniele *Bernoulli* intorno alla maniera la più vantaggiosa di supplire all' azione del vento con un nuovo artifizio di remigare, come il trovo accennato dal Sig. *Krafft* nel Vol. XX. de' nuovi Comment. di Pietroburgo; ma non avendo quell' opera in potere non posso rendere al celebre Autore di lei la giustizia, che può meritarsi. Intraprende il Sig. *Krafft* a richiamare questa nuova maniera ai primi principj della Meccanica, e a paragonarla con l' ordinaria e fondamentale, secondo ciò che n' ha scritto il Sig. *Eulero*, di cui precedentemente. Ma di nuovo non avendo innanzi agli occhi, come ho detto, quella Memoria, nè avendo potuto formarmene chiara idea da ciò, che ne dice il Sig. *Krafft*, non posso neppure far incontro de' calcoli di questo, e delle conseguenze che ne ricava. Si può per altro non senza fondamento asserire, che il meccanismo de' remi è tutt' altro da quello, con cui si spinge l' acqua direttamente con appositi ordigni, come par che qui si faccia, sopra di che ha dottissimamente trattato assai prima del Sig. *Krafft* il Sig. Gio: Alberto *Eulero* negli Atti di Berlino per l' anno 1764. Di modo che resta tuttavia dovuta l' intima discussione di quello al Sig. Leonardo *Eulero*. Essendo assai grande il numero delle considerazioni, da cui dipende una tale ricerca, *& celles qui sont connues*, dice egli alla pag. 182 §. 3., *étant melèes avec les inconnues, on ne sera plus surpris pourquoi cette matière a étè négligèe jusqu' ici, & combien il est difficile de n' y tomber point dans l' erreur*. E molto più apparirà vero il sentimento di lui, se potrà questa mia indagine meritare di esser letta attentamente.

CAPITOLO II.

Principj del remigare.

§. IV.

Qualunque volta nel maneggiare un argomento astruso di Dinamica non si offre agevolmente e sta recondita l' intima legge de' movimenti, che vi si fanno, non è consiglio riprovato il ricorrere a' principj generali, e talora a certe cause finali, secondo le quali è stato osservato regolarsi Natura costantemente, come sono la conservazione delle forze vive; il minimo o delle azioni, o del tempo; le vie brevissime, e simili leggi. Ma suole avvenire non di rado, che discoperti finalmente i principj naturali e proprj del soggetto, bisogna rinunciare alle teorie anche luminose, ch' eransi stabilite per l' innanzi o come troppo discordanti dalle vere, o come per sè insufficienti ad esaurire la materia. E accade ancora, che svanendo tutte le difficoltà, che traevano più che dalla cosa origine dall' improprio modo di trattarla, si sostituiscono felicemente a' mezzi di ragione elementi più sicuri, e al fatto non contrarj; il che quanto contribuisca all' avanzamento delle scienze non v' ha per avventura chi non lo conosca. L' ho toccato con mano non ha molto nel meditare intorno al moto de' liquidi, dopo un lungo esercizio di osservazioni e sperienze fatte sull' acque correnti. Ho lusinga, che la teoria, che n' ho tratto, introduca molto migliori aperture che non abbiamo in quell' oscurissima scienza; del che farò parte alla *Società*, allorchè abbia menato a termine il lavoro. Mi fo intanto a dare qui un saggio di questa verità nel presente argomento intorno al moto de' navigli a remi, movendo i passi dalla cosa, piuttosto che dagli astratti lontanissimi principj della Dinamica.

§. V.

Cominciamo pertanto dall' esaminare l' azione del remo. Il remo offre tre situazioni notabili da considerarsi; la prima è

quella ove il rematore applica la sua forza ; la seconda è la sponda del navilio su cui posa il remo ; e la terza è nella pala o parte più larga del remo, da cui è scacciata l'acqua. Distinguendo bene l' azione muscolare del rematore dal peso di lui, nella quale consiste propriamente la forza, che agita il remo, mentre il peso dell' uomo entra in massa col navilio, e fa parte del peso che debbe esser messo in moto, non è più una circostanza complicata (Mem. della Soc. R. di Berlino 1747. pag. 181.) l' essere contenuta la forza del rematore, e il trovarsi ella in azione nel navilio medesimo. Di modo che la forza reale applicata al remo è come se fosse immateriale o disgiunta dall' uomo, il quale come corpo pesante va tutto a carico del navilio; e va pure a carico di lui, siccome vedremo, la pressione, che si fa dal rematore nel puntellarvisi, onde promovere il remo; il che non va confuso con la forza muscolare, ch' egli esercita sul remo medesimo. Fatto questo primo passo per rispetto al punto principale del remo, mettiamoci a considerare l' uffizio di lui nell' altre due situazioni. E quanto alla seconda, altro è l' adoperare una leva entro il navilio posto altronde in movimento; nel qual caso il moto comune non turba altramente la legge della leva; e tutt' altro è il caso del remo, che opera egli stesso pel movimento del navilio, sì che non può mai considerarsi la sponda, su cui insiste il remo, come un punto fisso mosso soltanto di moto comune al remo e al navilio, mentre è l' azione stessa del remo, che produce un tal moto. Non è dunque applicato il remo al navilio come ad un ipomoclio, siccome con *Aristotele* han creduto parecchi altri, ma sì bene ad una resistenza da vincere, ad un ostacolo da smovere, ch' è il navilio medesimo. Ma nè pur l' acqua, a cui s' applica la pala, non può aversi in conto d' ipomoclio, perchè il remo diventi un vette omodromo, avvegnachè la pala è in continuo movimento e cangiamento di sito, e non ne ha ella alcuno a cui corrisponda stabilmente un punto fisso nell' acqua agitata, come richiede la legge di un tal vette. E' dunque anche l' acqua un' altra resistenza da vincere, un altro ostacolo da smovere col remo. Ed eccoci intanto con questa discussione giunti a stabilire

Che il remo è realmente un ordigno interposto tra due ostacoli da muovere contemporaneamente in parti opposte, stando ad un capo di lui applicata la forza motrice.

E come ogni resistenza si misura con un peso, possiamo intanto per facilità far rappresentare da due masse pesanti il navilio spinto, e il volume dell' acqua smossa dalla pala; di modo che se la verga inflessibile *AP* (*fig. I.*) rappresenti il remo, la massa *V* il navilio, la massa *A* l' acqua, e abbiavi in *P* una forza destinata a dar moto al sistema in un dato piano con la direzione *PB*, la legge di questo moto è precisamente quella del remigare. Questa prima importantissima verità mette a suo luogo la quistione nelle Meccaniche, e lascia vedere come di natura sua voglia essere trattato l' argomento.

§. VI

E' facile da vedersi primieramente, ch' è necessaria una certa proporzione tra i pesi *V*, *A* e la potenza motrice *P*, affinchè prenda moto tutto il sistema. Imperciocchè, se fosse invincibile l' ostacolo *A*, diventando la verga una leva di secondo ordine, dovrebbe la potenza *P* al peso *V* avere pel movimento ragione maggior di quella, che ha l' intervallo *VA* all' intervallo *PA*; e se il fosse l' ostacolo *V*, diverrebbe la verga una leva di primo ordine, e dovrebbe avere maggior ragione la potenza al peso *A*, che non ha l' intervallo *VA* all' intervallo *VP*. Ma essendo l' uno e l' altro un appoggio mobile, mentre resiste l' ostacolo *V* alla verga *PA*, perchè il peso *A* si muova verso *n*, e l' ostacolo *A* resiste alla medesima verga, perchè il peso *V* si mova verso *m*, cede continuamente l' uno e l' altro alla sollecitazione, e tutto il sistema si muove diversamente da quello che sarebbesi, se quegli ostacoli stessero a vicenda immobili un istante. Dovendo pertanto muoversi *V*, ed *A* contemporaneamente in parti contrarie, se sia (*fig. II.*) *AA'* la trasposizione istantanea di *A*, *VV'* quella di *V*, e *PP'* il viaggio della forza motrice, avrà la verga *PA* preso necessariamente la posizione *P'V'A'*, e vi sarà un punto come *M* tra *V* ed *A*, che nella comune traslazione de' pesi, e della potenza non s' è punto nè poco mosso dal suo sito. Il punto *M* è dunque come un punto fisso, un centro spontaneo di moto, intorno a cui si sono contemperati in quell' istante i mo-

vimenti dell' intero ſiſtema. Ed ecco riſultarci un punto nel remigare che in ogni impulſione del remo ſta fermo ed immobile in aria, mentre il navilio avanza effettivamente, il qual punto non è coſtituito nè nel navilio, nè nell' acqua, ed è il reale centro del moto, che ho detto ſpontaneo, intorno al quale ſi bilanciano l' azione della potenza, e la reſiſtenza del navilio e dell' acqua.

§. VII.

E perchè una medeſima potenza P dee mettere in movimento entrambe le maſſe V, A contemporaneamente, forz' è, che la reſiſtenza totale ſi divida in modo che ognuna di eſſe reſiſta alla potenza con egual momento, perchè la più grave ſi mova meno della men grave, ſiccome conviene. In tal guiſa la quantità del moto della potenza avrà una medeſima ragione alla quantità del moto di ciaſcheduna maſſa. Ed ecco un altro principio in queſta teoria, per cui ſi viene in cognizione, che il punto fiſſo, intorno a cui ſi fa il moto iſtantaneo nel remare, interpoſto tra la ſponda del navilio e l' acqua, è preciſamente il centro comune di gravità delle maſſe A ed V (*fig. I.*), equivalente l' una alla reſiſtenza dell' acqua ſcacciata colla pala, e l' altra alla reſiſtenza del navilio. Imperciocchè ſe ſia M centro comune di gravità de' peſi A ed V (*fig. II.*), ſaranno tra di sè uguali i momenti $A \cdot AM$, $V \cdot VM$, e nel moto avrà $P \cdot PP'$ una ſteſſa ragione alle uguali quantità $A \cdot AA'$, $V \cdot VV'$, eſſendo tra di sè gli archi AA', VV', PP' deſcritti col centro M come i raggi MA, MV, MP.

§. VIII.

Trovato il centro ſpontaneo del moto M, tutto ci ſi appiana nell' inveſtigazione della legge, con cui opera il remo. Imperciocchè facendo il punto M uffizio d' ipomoclio, dovrà ſtare per l' equilibrio la potenza in P all' oſtacolo in V come MV a PM, e la potenza in P all' oſtacolo in A come MA a PM; e però eſſendo uguali i momenti $V \cdot VM$, $A \cdot AM$, dovrà eſſere per l' equilibrio, combinando inſieme le reſiſten-

ze

ze che controagiſcono ſimultaneamente alla potenza *P*, il momento *P. PM* doppio del momento *V. VM*, oppure del momento *A. AM*; riſultamento importantiſſimo di cui faremo uſo a ſuo luogo. Quindi appariſce, che oltre all'eſſere improprio il collocamento dell'ipomoclio sì alla ſponda del navilio che nell'acqua per le ragioni, che abbiamo addotto al §. 11, incorre l'uno e l'altro nel difetto eziandio di far naſcere più movimento, che non v'è realmente per l'azione d'una ſteſſa potenza. Per vederlo in fatto s'inſtituiſca l'analogia, come *PA* a *PM*, così l'angolo *PMP'* all'angolo *PAC*, il quale ſia ſotteſo dall'arco *PC* deſcritto col centro *A* e coll'intervallo *AP*. Di nuovo inſtituita l'analogia, come *PV* a *PM* così l'angolo *PMP'* all'angolo *PVQ*, col centro *V*, e coll'intervallo *PV* ſi deſcriva l'arco *PQ* ſottendente l'angolo ritrovato *PVQ*. Siccome prendendo in cerchj diſuguali angoli reciprocamente proporzionali ai raggi dei cerchj, rieſcono tra di sè uguali gli archi, che a quegli angoli ſono ſotteſi, riſulta da queſta coſtruzione eſſere l'uno e l'altro arco *PC*, *PQ* uguale all'arco *PP'*. Ciò premeſſo, eſſendo l'arco *PP'* il viaggio fatto dalla potenza intorno al centro del moto *M*, mentre il navilio ha percorſo l'archetto *VV'*, e il punto *A* della pala l'archetto *AA'*, ſe foſſe ſtata appoggio fermo l'acqua in *A*, mentre la potenza aveſſe percorſo uno ſteſſo ſpazio *PC* di prima, deſcritto col centro *A* l'arco *VD*, ſarebbe ſtato *VD* il viaggio del navilio maggiore di *VV'*; e ſe foſſe ſtato appoggio fermo il navilio in *V*, mentre aveſſe percorſo la forza lo ſpazio di prima *PQ*, ſarebbe il punto *A* della pala pervenuto in *B* facendo un movimento maggiore del vero *AA'*. E qui ſi riſchiara maggiormente l'oſſervazione fatta intorno alla teoria del Sig. *Eulero* (§. III.). Non eſſendo altramente nel punto *V* nè appoggio, nè centro di moto, ma unicamente il ſito d'una maſſa da moverſi, a cui è applicato il remo, non può ivi in alcun caſo cadere conſiderazione di momenti, nè bilanciamento di quantità di moto. E però toſto che non può avervi intorno ad *V* l'uguaglianza de' momenti aſſunta da quell'immortale uomo al §. XXI. non può nè pure aver luogo l'equazione che ne deduce; il che turba non poco la teoria di lui.

CAPITOLO III.

Del moto accelerato del navilio a remi

§. IX.

Premeſſo il vero e naturale principio, ſu cui è appoggiata la navigazione a remi, cominciamo a farne l'applicazione convenevole. E primieramente conſiderare e diſtinguere dobbiamo i differenti ſtati del navilio in movimento, così ſopra un'acqua ſtagnante, come a ritroſo, o a ſeconda d'un'acqua corrente. Imperciocchè dall'un canto principia egli ſempre il ſuo moto dalla quiete, e va accelerandoſi per gradi ſucceſſivamente, condizione cui biſogna ſvolgere e conoſcere intimamente; e dall' altro il fatto giornaliero dimoſtra, che il rematore dopo un breve intervallo di tempo dal principio del remare, prende e mantiene una certa equabilità e uguaglianza di azione, sì che il movimento del navilio ſi fa ſenſibilmente uniforme; altro ſtato eſſenziale, in cui biſogna neceſſariamente internarſi, giacchè ſi comprende agevolmente, che quell' accelerazione prima ha un limite, perchè la reſiſtenza dell' aria e dell'acqua diviene ſempre più energica quanto più la celerità s' aumenta. Quindi è che impreſſo al navilio un certo grado di velocità finale, con queſta velocità conceputa ſi conſerva, e perſevera la navigazione. Conſidereremo pertanto, ch' ella ſi faccia in acqua ſtagnante, e non ſarà poi difficile il traſportarla per ogni verſo anche ſull' acque correnti. E procedendo con ordine tratteremo prima del movimento difforme, cioè del movimento primo del navilio partendo dalla quiete, da cui paſſar debba al movimento equabile finale da mantenerſi in appreſſo.

§. X.

E' fuor di dubbio, che movendo dalla quiete, e dovendo per gradi accelerarſi il navilio, la potenza applicata al capo del remo dee metter in moto la maſſa del navilio e quella

del remo; vincere lo sfregamento alla sponda; superare la resistenza dell' acqua, quella dell' aria, e per fin l' inerzia della parte di materia propria del rematore messa in moto con le braccia. Rappresentisi dunque il remo con la retta *PR* (*fig. III*) e sia in *R* il centro della pala, ove si riuniscono le resistenze, in *P* la forza motrice, in *V* la sponda del navilio, che dee in un con esso essere promossa dal remo. Considereremo qui come concentrato il navilio in *V*, come se il moto della sponda *V* fosse il moto stesso di lui, riserbandoci a fare in appresso la debita separazione di questi moti, che non vanno altramente confusi, come s'è fatto finora. E intanto si faccia

PV	a
VR	b
La forza motrice in *P*	F
L' inerzia della forza motrice	ω
La massa del navilio	M
La massa del remo	N
La potenza equivalente allo sfregamento costituita in *p*	P
La superficie anteriore del navilio, che fende l' acqua	f^2
La superficie del remo concentrata in *R*	g^2
L' altezza da cui scendendo un grave verticalmente acquista infine della discesa la velocità adattata a questo sistema di elementi del navilio	Z
L' altezza simile dovuta alla velocità della pala . .	y
Lo spazio, che dee percorrere il navilio di moto accelerato prima di giungere a quella velocità finale . .	S
Il tempo, che vi deve impiegare	T

S' intenda ora fatto dal sistema un piccolo movimento dalla quiete, sì che la forza motrice giunga in P', il navilio in V', il centro della pala in R'. Sarà M il centro spontaneo di rotazione. Ed è certo, che non essendo le resistenze in *V*, *R* controagenti, ma puramente da mettersi in moto, si avrà l' accelerazione angolare dividendo il momento della forza motrice pe' momenti delle resistenze, che debbono rivolgersi intorno ad *M*. Ora in *V* l' intero ostacolo è composto della massa inerte del navilio *M*, e della resistenza dell' acqua all' essere fessa dalla prora, la qual resistenza si misura pel solido $f^2 (VV')^2$; e l' ostacolo in *R* viene dalla resistenza, che fa l' acqua all' essere smossa dalla pala, di cui è misura

il ſolido $g^2(RR')^2$. E poichè i momenti di queſti oſtacoli debbono eſſere uguali tra di sè intorno al punto fiſſo M, dovrà eſſere $N+f^2(VV')^2 : g^2(RR')^2 = MR : MV$, e componendo

$M+f^2(VV')^2+g^2(RR')^2 : g^2(RR')^2 = VR(=b) : MV$, e

però ſarà $MV = \frac{g^2 b(RR')^2}{M+f^2(VV')^2+g^2(RR')^2}$, e ſimilmente

$MR = \frac{b(M+f^2(VV')^2)}{M+f^2(VV')^2+g^2(RR')^2}$. Ma eſſendo VV', RR' archi

ſimili deſcritti col centro M, e co' raggi MV, MR ſarà

$$MV : MR = VV' : RR' \text{ cioè}$$

$$g^2(RR')^2 : M+f^2(VV')^2 = VV' : RR',$$ ed eſſendo

VV' l' elemento dello ſpazio S, ſarà

$g^2(RR')^3 = dS(M+f^2 dS^2)$, e $RR' = \sqrt[3]{\frac{dS}{g^2}(M+f^2dS^2)}$

che faremo intanto $= \mathfrak{Q}$

Dunque $MV = \frac{g^2 b \mathfrak{Q}^2}{M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2}$, $MR = \frac{b(M+f^2dS^2)}{M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2}$

e l' intervallo PM dal punto di applicazione della forza motrice al centro M ſarà $= a + \frac{g^2b - \mathfrak{Q}^2}{M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2}$, e il momento della forza ſarà

$$(F-p)\left(a+\frac{g^2b+\mathfrak{Q}^2}{M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2}\right) = A$$

Determinato il numeratore della frazione che dee eſprimere l' accelerazione momentanea del remo, fa d' uopo definire il compleſſo de' momenti pel denominatore. E primieramente eſſendo ω l' inerzia della forza motrice, la quale è coſtretta a muoverſi con la ſteſſa velocità della forza intorno al punto M, ſarà il ſuo momento $\omega . \overline{PM}^2$; e per l' inerzia poi del remo, dovendo tutti i punti di lui rotarſi intorno ad M, converrà moltiplicare ogni particella materiale del remo pel quadrato di ſua diſtanza dal punto M, onde averne il momento totale, e raccogliere in ſomma queſti prodotti. E poichè queſta ſomma può rappreſentarſi dal prodotto di N, che è la maſſa del remo, nel quadrato d' una retta linea K, ſarà il momento d' inerzia del remo NK^2. E poichè la reſiſtenza dell' acqua dee vincerſi con lo ſteſſo moto rotatorio in-

torno ad M, con cui dee pure promuoversi la massa del navilio M, e vincersi la resistenza della prora, sarà il momento pel punto $V = (M + f^2 dS^2)\,\overline{MV}^2$, e il momento pel punto $R = g^2 \mathfrak{Q}^2 \overline{MR}^2$. Lasciando dunque da parte la resistenza dell' aria, come cosa piccola in questo movimento, l' universale momento, che costituir debbe il denominatore, sarà

$$\omega . \overline{PM}^2 + NK^2 + (M + f^2 dS^2)\,\overline{MV}^2 + g^2 \mathfrak{Q}^2\,\overline{MR}^2 = B$$

e però $\frac{A}{B}$ sarà l' accelerazione iniziale del remo intorno ad M. Se dunque si moltiplichi quest' espressione per MV, sarà $\frac{A . MV}{B}$ l' accelerazione angolare del navilio in V. Ora essendo Z l' altezza dovuta alla celerità finale, che dee acquistare il navilio in fine dello spazio S, sarà pe' principj della Meccanica

$$BdZ = AdS . MV$$

e integrando $Z = \int \frac{AdS . MV}{B} +$ cost., in cui $\frac{AdS . MV}{B}$ è funzione di dS, e costanti unicamente.

§. XI.

Questa è l' espressione della relazione tra lo spazio S, e l' altezza dovuta alla celerità finale, che avrà il navilio, percorso che abbia di moto accelerato un tale spazio partendo dalla quiete, nella qual espressione non si è nè fatta alcuna supposizione forzata, nè mendicato alcun principio straniero. Ma daremo qui un' altra soluzione di questo problema, la quale ci sarà strada a determinare il tempo T impiegato a percorrere lo spazio S agevolmente. Se tutti gli ostacoli distribuiti, e applicati a diverse parti del remo fossero costituiti nello stesso punto P della forza motrice F, sarebbe la forza acceleratrice assoluta espressa per una frazione avente F per numeratore, e le somme degli ostacoli per denominatore. Ma importando conoscere la forza acceleratrice al punto V, ov' è il navilio, si trasporti in V la forza motrice, facendo $MV : MP = F : \frac{F . MP}{MV}$, e sarà $\frac{F . MP}{MV}$ la forza motrice che sol-

leciterà il navilio immediatamente in V, cioè $(F-p)\,MP : MV$, diminuendo la forza F per conto dello sfregamento (§. X.). Essendo pertanto accompagnata la forza F inseparabilmente dalla propria inerzia ω, sarà ella primamente uno degli ostacoli da sollecitarsi dalla forza in V. A questo si aggiunga la massa del navilio, e la resistenza dell' acqua, l' aggregato delle quali abbiamo trovato essere $M+f^2dS^2$, e sia di più N' l' inerzia del remo ridotta al punto V. In conseguenza avremo intanto in V il complesso $\omega+M+f^2dS^2+N'$. Resta che vi riduciamo la resistenza, che fa l' acqua al centro della pala.

Dovendo essere per natura del centro spontaneo M uguali i momenti delle resistenze costituite in V ed R intorno ad M, torna lo stesso per una potenza applicata in P il sollecitare nello stesso tempo l' ostacolo in V, e la resistenza attuale al punto R, ovvero la resistenza in V raddoppiata da muoversi intorno al punto M. E però invece di ridurre in V la resistenza della pala basta duplicare la resistenza $M+f^2dS^2$ propria del punto V, sì che il complesso di tutti gli ostacoli ridotti in V sarà

$$\omega+2M+2f^2dS^2+N'$$

Se dunque si divida la forza motrice $\frac{(F-p)\,MP}{MV}$ per tutto quest' aggregato di ostacoli, sarà $\frac{(F-p)MP}{MV(\omega+2M+2f^2dS^2+N')}$ la forza acceleratrice assoluta costituita in V. E se di nuovo si divida questa forza acceleratrice per la distanza VM, sarà

$$\frac{(F-p)\,MP}{\overline{MV}^2(\omega+2M+2f^2dS^2+N')}$$

la forza acceleratrice angolare, con cui l' angolo VMV' va crescendo, cioè mettendovi i valori di PM, VM sarà questa forza espressa dalla formula

$$\frac{(F-p)(M+f^2dS^2+g^2\mathfrak{Q}^2)(aM+af^2dS^2+(a+b)g^2\mathfrak{Q}^2)}{b^2g^4q^4(\omega-2M+2f^2dS^2+N')}$$

cui faremo per brevità $=C$.

Essendo dunque Z l' altezza dovuta alla velocità finale acquistata dopo percorso di moto accelerato lo spazio S, e pe' principj Dinamici stando $dZ:dS=1:$ alla forza acceleratrice,

avrà neceſſariamente luogo l' equazione $dZ = \frac{dS}{C}$, e integrando $Z = \int \frac{dS}{C} + coſt.$ Come poi pe' medeſimi principj è $dS : \sqrt{Z} = dT$, ſarà integrando $T = \int \frac{dS}{\sqrt{Z}} + coſt.$, ch' è il tempo impiegato a percorrere lo ſpazio S.

§. XII.

Siamo pertanto paſſati col navilio dalla quiete al conſeguimento della velocità, che dee da eſſo conſervarſi equabilmente in appreſſo. Ma l' equazione è unica, e due ſono le variabili, ch'ella abbraccia, sì che, ſe altronde non ſi pervenga a conoſcere o lo ſpazio S, o la velocità acquiſtata, tutto è indeterminato.

Sarebbe certamente far forza alla verità il trarſi d' impaccio per vie tortuoſe, mentre quella, che ci viene indicata da Natura, è diritta e piana. Giacchè dunque ſiamo uſciti dall' accelerazione del moto, ed abbiamo conſeguito la relazione tra lo ſpazio percorſo di moto accelerato e la velocità finale, che dee mantenerſi, ricorrere dobbiamo allo ſteſſo moto uniforme del navilio, introducendo per la velocità di lui quella ſteſſa, ch'è dovuta all'altezza incognita Z; e come le leggi di queſto moto uniforme ſono ben diverſe da quelle del moto accelerato, per mezzo di eſſe verremo in cognizione del valore Z, fermi tutti gli altri elementi ſuppoſti nel navilio. Allora ſarà facile lo ſvolgere la formula precedente, e il trovare sì lo ſpazio S percorſo di moto accelerato, e sì ancora il tempo impiegato, onde pervenire a quella tal velocità determinata. Per ora dunque laſceremo eſpreſſi così, come ſono generalmente, gli elementi di forze, inerzie ecc. differendo l' appropriar loro più adattate eſpreſſioni, ed applicazioni immediate al caſo di concretare la teoria, in cui faremo le correzioni convenienti alle formule poc' anzi trovate, onde avvicinarle al preciſo operare della Natura. E non ſenza ragione mi ſono aſtenuto dal farlo qui ſul bel principio, ſiccome quelle,

che avrebbero resa sommamente inviluppata l'investigazione del moto accelerato.

CAPITOLO IV.

Del movimento equabile del navilio a remi.

§. XIII.

Or poi che il navilio ha conseguita la velocità finale dovuta all' altezza Z, ed è per conseguenza cessata ogni accelerazione, il moto impresso alle masse persevera, si perpetua per sè stesso, e proseguirebbe uniformemente, se la resistenza dell' acqua, e dell' aria non vi fosse. Bisogna dunque, che la forza motrice distrugga continuamente l' effetto di sì fatte resistenze, nelle quali non resta altramente perpetuato il movimento. Ma non sono queste sole le resistenze, nelle quali non resta egli perpetuato, e che sussistono a carico di lei anche nel moto uniforme. E' vero, che nel trasporto del navilio vien pure trasportata la massa del rematore, e quella del remo. Ma il moto comune non distrugge le accidentalità e le proprietà de' moti particolari, che si fanno nel navilio medesimo, sì che se la sponda regge il peso del remo, il rematore tuttavia nell' agitarlo entro la barca non viene sollevato in questo moto comune dal dispendio di forza, che dee impiegare nel moverlo. Lo stesso accade dell' inerzia del rematore stesso, la quale nella traslazione comune non cessa di rapire per sè una parte della forza motrice. Tutti questi oggetti vanno messi in conto, e convien farne estimazione a parte a parte. Intanto mi so lecito di negligere la resistenza dell' aria estremamente piccola in confronto di quella dell' acqua; e dell' altre faremo parola successivamente. Questo è il caso in cui ha luogo il grande principio di tutte le macchine suscettibili di riduzione a moto uniforme, cioè che la forza necessaria per conservarvi il moto è uguale precisamente a quella, ch' è necessaria per l' equilibrio, sia poi comunque si vuole celere o tardo il moto impresso; e perciò possiamo accignerci direttamente a questa seconda indagine, non avendo d' uopo che de' principj comuni della Statica per farlo.

lo. Ma se non abbiamo per questo verso gravi difficoltà da superare, è ben malagevole assunto il depurare la materia da ogni supposizione, e non ammettere nella teoria che cose di fatto, e quelle realmente, che sono immediatamente proprie della navigazione a remi. Il vedremo qui appresso.

§. XIV.

Il primo oggetto pertanto che ci si offre da considerare si è l' obbliquità variabile del remo nell' azione, obbliquità che affetta continuamente e modifica l' energia della potenza motrice. In fatti se sia *PMR* (*fig. III.*) la situazione del remo in atto di essere immerso con la pala nell' acqua, è certo, che in ogni istantaneo moto di lui, per cui passi nella situazione *pMr*, varia la direzione della forza in *P* per rispetto al remo, e varia pure l' angolo sotto di cui vien fatta con la pala l' impressione nell' acqua; il che rende mutabili ad ogni istante i momenti rispettivi relativamente al punto fisso *M*. Ma come il rematore agisce sempre parallelamente alla chiglia; così l' angolo variabile, che fa la direzione di lui col remo, è l' angolo stesso che fa il remo ad ogni istante con la chiglia; il qual angolo a mezzo la palata incirca è retto, e devia poi di qua e di là dal retto con tal legge, che se l' energia del rematore va crescendo dal principio dell' immersione fino a mezza la rivoluzione PP', di là prende ella costantemente a decrescere per uguali gradi, finchè torna alla condizione di prima. Ora perchè la intera rivoluzione PP' è piccola, e di poco s' allontana dalla perpendicolarità con la chiglia la direzione del remo anche nella maggior declinazione, assumeremo senza timore di errare un certo angolo ϕ non molto minore di un retto, quasi fosse egli la costante direzione del remo con la chiglia nell' intera rivoluzione. Prendendo pertanto l' unità per raggio, e facendo $1 : \text{sen.}\ \phi = F : F\,\text{sen.}\,\phi$, sarà non già F la forza motrice, ma $F\,\text{sen.}\,\phi$. E parimenti essendo per angoli obbliqui non molto minori del retto l' impulsione che risulta dall' urto obbliquo d' un fluido contro un piano, in composta ragione del piano, che la sostiene, del quadrato della velocità, e del

quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, sarà la resistenza che incontra la pala non già g^2y, ma g^2y sen.$^2\phi$.

§. XV.

Ciò premesso, un articolo ben più dilicato ci si fa innanzi da svolgere; a torto non avvertito da chichessia, intorno alla direzione del moto indotto nel navilio da' remi. L' esperienza giornaliera il dimostra, se la teoria nostra da per sè non lo palesasse con la scoperta che abbiamo fatto di un centro spontaneo di rotazione suor del navilio, che si verifica nel remare, che esercitandosi il remo naturalmente e senza artifizio del rematore da una sola parte del navilio, questo andrebbe realmente in giro, ben lontano dal prendere una direzione per linea retta, come gratuitamente si supponeva; al che non s' è fatto mai attenzione, quasi fosse per sè retto il movimento, che non è, senza l' ajuto di artifizj particolari che alla rettitudine il costringono. Sempre e in tutti i casi camminando per retta linea un navilio a' remi, egli è di moto composto, che si fa questo movimento retto. Imperciocchè se il navilio ha timone, e se sieno i rematori disposti da una parte, rettificasi da lui il cammino ad ogn' istante, sì che tiene una via di mezzo il navilio tra due sforzi cospiranti. E se non v' abbia timone, sussistendo i rematori da una sola parte, essi non remigano continuamente a palata distesa e naturale, per cui andrebbe assolutamente in giro il navilio, ma sì bene torcono e rettificano essi medesimi il deviar del navilio dalla retta col ricevere destramente l' impressione spontanea dell' acqua su la pala, perchè rivolgasi a destra la chiglia, se il deviamento di lei naturale fosse a sinistra, e per converso; di modo che fanno con le pale continuamente le veci del timone. Che poi vada il navilio di moto composto allorchè è sollecitato da uguali sforzi di rematori collocati a destra e sinistra, ella è cosa sì evidente, che non ha bisogno di dimostrazione. Questa realtà di moto composto non è poi sì indifferente, che messa in lume non porti un essenziale cangiamento nell' estimazione del viaggio del navilio, che ci allontana da tutto ciò, che i Geometri citati qui innanzi ci hanno lasciato scritto su questo

particolare. Sia pertanto V l'altezza da cui ſcendendo un grave di moto accelerato acquiſta in fine la velocità conveniente al punto V. E' certo che queſta velocità appropriata al punto della ſponda V, ove non è coſtituita che una delle forze laterali del ſiſtema, non può mai attribuirſi al navilio, nè può ad eſſo aſſegnarſi il movimento ſolo dipendente dall' impulſione obbliqua alla chiglia, ch' ei riceve in V, dovendo quello riſultare in ogni caſo dalla combinazione di queſt' impulſione con un' altra, perchè il navilio s' incammini, e mantengaſi nella voluta direzione. La velocità dunque di lui non eſſendo dovuta ad V, ma ad una funzione di V, che abbiamo detto Z, facciamoci a rintracciarla. Per farlo adeguatamente conſidereremo ſempre il navilio promoſſo dalla combinazione di due remi collocati alle due ſponde, potendo a due remi ridurſi il ſiſtema di quanti remi ſi vogliano combinati come vedremo. E come abbiamo per facilità aſſunto il ſimbolo φ per eſprimere un certo angolo coſtante, che vuolſi ſupporre fatto col remo sì dalla forza motrice, che dall' impreſſione dell' acqua in ogni palata; così prenderemo la lettera μ per denotare l' angolo che fa in V con una retta perpendicolare alla chiglia la direzione del moto del punto V nel navilio, mentre il ſiſtema dall' una e dall' altra parte fa nel remigare una rivoluzione intorno al riſpettivo centro ſpontaneo, ch'è fuori del navilio. Condotta perciò una retta AB (*fig. IV.*) per V perpendicolare alla chiglia, rappreſentando PR, $P'R'$ le prime ſituazioni de' remi laterali, ſieno $CV'A$, DVB gli angoli aſſunti μ; e prolungando le direzioni VC, VD sì che concorrano in Q ſi eſpongano le Qb, Qc tra di sè uguali, le quali rappreſentino le velocità $\sqrt{V}$ de' punti V', V del navilio. Condotte cN bN parallele a Qb Qc, e tirata la diagonale QN, ſarà ella la direzione, e velocità compoſta del navilio, com' è manifeſto. Condotta bd perpendicolare a QN, ſarà l' angolo $Qbd = QVA$, e però con la Trigonometria ſi troverà $Qd =$ ſen. $\mu \sqrt{V}$; quindi $QN = 2Qd = 2$ ſen. $\mu \sqrt{V}$ ſarebbe l' aſſoluta velocità del navilio, ſe non doveſſe ella incontrare altronde alcuna alterazione, di che nel paragrafo ſeguente.

§. XVI.

Non è possibile, che si renda efficace l'azione del rematore applicato al punto P del remo, se non v'abbia un punto fisso, che gli serva di appoggio. In fatti nell' atto di spinger oltre il remo si puntella egli co' piedi al navilio, e con quanta forza spinge il remo, con altrettanta respinge indietro il navilio medesimo. Il Sig. *Eulero* alla pag. 196. lin. 12. estima questa respinta all'indietro uguale all'intera forza del rematore, che per verità è molto maggiore del dovere. Imperciocchè si osservi attentamente il meccanismo del remare, e si vedrà che il rematore inclina il corpo all' innanzi, sì che nel puntellarsi non opera tutta la forza di lui direttamente nel far retrocedere il navilio. Rappresenti AB (*fig.* V.) l' inclinazione del rematore nel promuovere il remo con le braccia, e si conduca la verticale AC, e l' orizzontale BC. Una parte della reazione si esercita secondo la verticale AC, e l' altra BC rappresenta la retrocessione del navilio direttamente opposta al suo cammino secondo la chiglia. Secondo AC nasce un'immersione momentanea del navilio nell'acqua, percettibile anche al senso e reale, per cui cresce la superficie f^2, che intendiamo esser diretta a solcar l'acqua. Se dunque vorremo nel computo trascurare quest' immersione, non sarà però lecito il far dare indietro il navilio secondo tutta la forza del rematore impiegata nello spingere il remo. Ma di più è contrario al fatto il supporre parallelo alla chiglia il moto indotto dal remo nel punto V, per il che abbiamo qui innanzi detto μ l' angolo obbliquo che fa quivi la direzione del moto con la perpendicolare alla chiglia; e però, qualunque siasi la forza che respinge, essendo il moto che ne risulta realmente nella direzione della chiglia, bisogna sottrarlo non dal movimento obbliquo del punto V, ma sì bene dal moto diretto secondo la chiglia, che viene indotto dalla cospirazione delle forze laterali. Intanto se AB rappresenti la forza F sen. ϕ (§. XIV.) applicata al remo, e si chiami Δ l' angolo ABC; sarà la forza BC che fa dar indietro il navilio secondo la chiglia $= F$ sen. ϕ cos. Δ, la quale pongasi $= f^2 M$; e però $2f^2 M$ sarà la forza respingente per conto de'

due remi laterali, cioè uguale ad un volume d' acqua avente per base la superficie f^2 del navilio, e per altezza $2M = \frac{2}{f^2}(F \text{ sen.} \phi \text{ cos.} \Delta)$. In conseguenza la forza assoluta, che dee essere uguale e contraria alla resistenza, resta di altrettanto debilitata, oppure a detta forza assoluta si aggiunge da vincere altrettanto di resistenza, quanto è quella forza, con cui è respinto il navilio. Ora essendosi trovato (§. XV.) 2 sen. $\mu \sqrt{V}$ per l' espressione della velocità del navilio per un pajo di remi, sarà la resistenza di lui diretta e perpendicolare, indipendentemente dall' oggetto qui considerato, uguale a $f^2 4 V \text{sen.}^2 \mu$; alla quale dando questo nuovo aumento, se vogliasi non fare alcun diffalco dalla forza assoluta, sarà manifestamente la resistenza totale $= f^2 \left(4V \text{sen.}^2 \mu + \frac{2F \text{ sen.} \phi \text{ cos.} \Delta}{f^2}\right)$.
Al qual passo non giungo a comprendere, come si voglia poi (Mem: di Berlino sopraccitate al §. XXV.) che, mentre il remo è in aria, possa aumentarsi il movimento del navilio, stante che, mentre il remo è in aria, progredisce il navilio col moto impressogli mentre il remo è in acqua, moto in cui è già fatta la detrazione retrograda, e ch' è propriamente moto residuo; nè può altronde il navilio ricevere verun promovimento oltre a quello che ha già conceputo, essendo piuttosto disposto a ritardarsi, come vedremo qui appresso, mentre il remo è in aria, se la nuova impressione non rimettesse prestamente in vigore, e rianimasse il movimento.

§. XVII.

Abbiamo avvertito nel §. XIII, che non è la sola resistenza dell' acqua alla prora, cui debba superare la forza motrice nel moto uniforme, negletta quella dell' aria, avendovi pure l' inerzia del rematore, o una certa quantità di materia propria da muovere; e in oltre la resistenza per conto del remo da agitare. Ma quanto è stata ragionevole cosa il considerare la prima nel moto accelerato, come realmente abbiamo fatto col simbolo ω, una sola riflessione persuaderà che nel moto uniforme dobbiamo astenerci dal tenerne conto. Im-

perciocchè è incontraſtabile, che l' equilibrio dipende dalla ſola quantità delle forze impellenti, e niente fa al caſo, che le forze ſollecitanti ſieno o nò accompagnate dall' inerzia. Ma appunto il moto uniforme non con altra forza ſollecitante ſi mantiene, che con quella, ch'è neceſſaria per l' equilibrio (§. XIII.), in conſeguenza l' inerzia di lei come in queſto così nel moto uniforme del navilio non vuol eſſere conſiderata. Siccome dunque faremo nell' ultimo Capitolo un' eſtimazione convenevole della forza motrice, adattata all' uomo, poſſiamo qui ommettere ogni altra di lei modificazione continuando a laſciarla ſotto il ſimbolo F. Reſta dunque, che veggiamo qual reſiſtenza provenga dal canto del remo. Ma è sì dilicato per mio avviſo queſt' argomento, che non poſſiamo diſpenſarci dall' entrare per conto di lui in una più lunga diſcuſſione. Fatto ſta primieramente che nella palata diverſi ſono gli accidenti del remo, e l' un dall' altro diſtinti sì nella poſizione, che nel movimento. Ma quanto a ciò di cui andiamo in traccia, ch'è l' impreſſione ſul navilio, è certo che tutto ſi riferiſce a quell' iſtante in cui riceve egli l' impulſo effettivo dal remo, e che gli altri ſono in certa guiſa ſtranieri all' oggetto principale, e puramente concomitanti. In un tempo tutto il remo è in aria; in un altro egli è tutto in acqua. Di queſti tempi non v' ha che una porzione ſola del ſecondo in cui ſi eſercita l' atto momentaneo dell' impulſione contro la ſponda V; il reſto vi conduce, ma non opera attualmente. Compreſa bene queſta diſtinzione, a cui avremo occaſione di ritornare in queſto medeſimo Capitolo, non poſſiamo confondere l' un con l' altro gli accidenti proprj di ogni intervallo, eſſendo ſucceſſivi non ſimultanei, sì che altro è l' eſercizio della medeſima forza motrice allorchè agita il remo in aria, l' attuffa nell' acqua, e dall' acqua il ritrae in ſeparati tempi. Ma ancora dobbiamo riflettere a due particolari, cioè che il remo primamente è portato dalla ſponda, e di più che il di lui centro di gravità cade ne' contorni dell' appoggio; il qual bilanciamento non fa l' ultima cura de' buoni coſtruttori de' remi. In conſeguenza per eſtimare adeguatamente la reſiſtenza del remo ſi dee prima ben conoſcere in che ella conſiſta, indi come ne' diverſi tempi della palata operi contro la forza motrice. Conſiſte ella dun-

que nell' opporre l' inerzia da ſuperare, e l'attrito ſu la ſponda. Imperciocchè eſſendo le parti del remo per coſtruzione ſenſibilmente in equilibrio intorno all' appoggio, non v' ha forza ſenſibilmente controagente, come ſarebbe ſe il centro di gravità ricapitaſſe a diſtanza notabile dalla ſponda; per la qual coſa l' inerzia ſola entra a reſiſtere, e lo sfregamento, come s' è detto. Ma l' una e l' altro debbono computarſi non adoperare altramente contro la forza motrice nel piccolo tempo dell' impulſione reale, ſpiegandoſi ſolamente in tutte le altre agitazioni del remo concomitanti, che abbiamo da quella accuratamente diſtinto. In fatti non è che in quel ſolo momento, che ſi verifica lo ſtato dell' equilibrio, ceſſata già ogni accelerazione, per la conſervazione del moto equabile, come ſe non vi aveſſe moto; e però quello eſſendo l' accidente iſolato, che dobbiamo eſtimare, ceſſa ogni conſiderazione sì per parte dell' inerzia, che per conto dell' attrito, quaſi in quel momento ſteſſe quieto il remo; e l'una e l'altro poi riaſſumono il loro vigore in tutti gli altri intervalli precedenti e ſucceſſivi, ne'quali non ha luogo la contemplazione dell' equilibrio, e dee il rematore maneggiare effettivamente il remo come corpo inerte, ſtriſciarlo ſull' appoggio, girarlo, il che non fa al caſo noſtro, non entrando queſte azioni del rematore, ſeparate da quella, nelle noſtre formule, in cui non ſi valuta, che l' eſercizio neceſſario per la conſervazione del moto equabile. Depurato pertanto queſt' articolo, e conoſciuta la parte, che hanno queſte reſiſtenze nella palata, reſta nel moto equabile da metterſi a calcolo quelle ſole reſiſtenze che fa l' acqua per oppoſti verſi alla prora, e alla pala, negletta l' aria, come faremo.

§. XVIII.

Ma ſe non è lo sfregamento del remo contro la ſponda un nodo in linea di attrito, uno ve n' ha, di cui non s' è fatto mai parola, il quale è ben altra coſa da quello, ed influiſce nelle eſtimazioni de' moti eſſenzialmente. Il navilio nell' avanzare fa un ſolco più o men profondo ſecondo l' immerſione di lui nell' acqua, per cui ſi divide ella e ſtriſcia ai fianchi, e pel fondo. Non è egli queſto il caſo di un vero at-

trito, che costituisce una giunta di resistenza da vincere per la forza motrice, che non dovrebbe trascurarsi? Egli ha luogo e a remi, e a vela, e in qualunque modo si faccia la navigazione. Veramente ne hanno fatto cenno gl' illustri Signori d' *Alembert*, *Condorcet*, e *Bossut* nell' eccellente libro pubblicato del 1777, che ha per titolo *Nouvelles Experiences sur la resistence des Fluides*, ma non ne hanno intrapreso alcun valutamento. Il solo che abbia affrontato il quisito dopo quell' epoca, cioè nel 1778, è stato il Sig. *Eulero*, come può vedersi nelle Memorie della Real Società di Parigi di quell' anno. Ma non è l' opera di lui che un possente tentativo di mano maestra, e la materia vuol essere reagitata sì per le somme difficoltà, che l' accompagnano, e sì ancora perchè non è ristretta al caso de' navigli in moto, ma s' attiene in generale alla resistenza, che soffrono i corpi tutti nel muoversi pe' fluidi. Se non mi fossi proposto di svolgere questa teoria in modo, onde poterne fare immediata applicazione alla pratica, non sarebbe stato difficile l' introdurre nell' espressione precedente della resistenza un appropriato simbolo di più per questo conto. Ma sia permesso il prescindere per ora da questa particolare affezione de' navigli, finchè non meno la teoria di lei, che una delicata serie di esperienze n' abbia messo in chiaro lume l' estensione, e il vero valore. Sopra di che non lascierò con le mie scarse forze di adoperarmi in appresso, siccome ho fatto non senza frutto nell' indagine sul moto oscurissimo de' liquidi, che ho accennato nel principio del II. Capitolo di questa Memoria.

§. XIX.

Ora ci bisogna definire la quantità dello sforzo necessario in V, V', onde superare la resistenza del navilio. Si ripigli pertanto la fig. IV, e rappresenti QN la forza assoluta uguale e contraria alla totale resistenza di lui che abbiamo determinato al §. XVI. Essendo bQ, cQ le direzioni delle forze uguali applicate in VV' concorrenti in Q, ed essendosi detto μ l' angolo QVA, compiuto il parallelogrammo $QcNb$, e condotta bd normale a QN, poichè

QN

$\mathcal{Q}N = f^2\left(4V\text{sen.}^2\mu + \frac{2F\text{ sen.}\,\phi\text{ cos.}\,\Delta}{f^2}\right)$, se si faccia

$$\text{sen.}\,\mu : \text{sen.}\,T\,(=1) = \mathcal{Q}d\left(=\frac{\mathcal{Q}N}{2}\right) : \mathcal{Q}b$$

si troverà che la formula (A)

$$(A)\ldots\ldots f^2\left(2V\text{sen.}\,\mu + \frac{F\text{ sen.}\,\phi\text{ cos.}\,\Delta}{f^2\text{ sen.}\,\mu}\right)$$

è la parte di resistenza totale, che va a peso di ognuno ugualmente de' punti VV', ove sono applicati i remi. La si faccia per brevità $= \mathcal{Q}$.

§. XX.

E qui per ultimo ci rimane da considerare un articolo importantissimo, prima di comporre gli elementi determinati qui innanzi. Certo è, che tanto nel moto accelerato quanto nell' uniforme, di cui trattiamo presentemente, essendo essenzialmente distinto in ordine al promuovere il navilio, l' operar del rematore nelle diverse azioni di un' intera palata, efficace soltanto in parte, sopra di che abbiamo ragionato diffusamente al §. XVII, si vede manifestamente che non è continua l' impulsione di lui; e però qualche cosa avvi di ascoso in questo, che merita dilucidazione, e che necessariamente importerà qualche modificazione ne' suddetti elementi. Io la concepisco in questa guisa. Fatta l' impressione del remo alla sponda del navilio, e lasciato questo a sè stesso, prende egli necessariamente a muoversi come un corpo lanciato in un mezzo resistente, perdendo ad ogni istante una particella di sua velocità, sì che, come il fatto giornaliero il comprova, passando per tutti i gradi di moto ritardato tornerebbe alla quiete di prima, se nuova forza non sopraggiugnesse a rimetterlo in movimento. Quanto più dunque è lungo l' intervallo inefficace, che passa tra un' effettiva impulsione ed un' altra, cioè quanto è più tardo il rematore nel rimettere in azione impulsiva il remo, tanto più perde di sua celerità il navilio, e vie maggior impulso si richiede per fargliela ripigliare. E parimenti quanto è più durevole e continuata l' impressione che fa la pala nell' acqua, relati-

vamente a detto intervallo inefficace o di nessuna sollecitazione, tanto meno si ritarda il navilio da un' impulsione all' altra, ovvero tanto più cresce l' effetto della forza motrice. In conseguenza, se si chiami T il tempo dell' inefficacia da un' impulsione all' altra, t quello della durata di un' impulsione effettiva, secondo la ragione di t a T andrà estimata l' energia della forza contro una resistenza data, o l' energia della resistenza contro una forza data. Di modo che, se sia F la forza, $\frac{t}{T}F$ potrà esprimere l' azione continuata nel sollecitare la resistenza, oppure, essendo Q la resistenza, $\frac{T}{t}Q$ sarà quello che diventa detta resistenza, mentre operi senza interruzione la forza F. Ed ecco che o moltiplicando la resistenza per la ragione $\frac{T}{t}$, o la forza per $\frac{t}{T}$, si supplisce all' interruzione, e torna lo stesso, come se l' impressione della pala fosse continua, e non restasse mai abbandonato a sè stesso il navilio. Convien dunque mettere ovunque nelle formule nostre $\frac{t}{T}F$ in luogo di F, oppure anche F', posto $\frac{t}{T}F = F'$; e sarà perpetuamente F' la forza del rematore ridotta a continuità. Per questa via semplicissima si rimedia ad un' irregolarità, ch' è inevitabile nel movimento de' navigli a remi, e che contemplata sott' altro aspetto potrebbe involgere in gravi difficoltà il maneggio delle formule.

§. XXI.

Premesso tutto questo, facciamoci a considerare, che tre sono le incognite quantità principali, che dobbiamo determinare in questa teoria, cioè l' altezza Z dovuta alla velocità del navilio, l' altezza V dovuta alla velocità del punto V, e la corrispondente altezza y per la velocità della pala. E quanto alla prima, non è difficile cosa il vedere, che essendosi trovata (§. XVI.) l' espressione della resistenza diret-

ta e perpendicolare del navilio $= f^2(4V\,\text{fen.}^2\mu + \frac{2F'\,\text{fen.}\,\phi\,\text{cof.}\,\Delta}{f^2})$ cioè uguale ad un volume d'acqua avente la fuperficie f^2 del navilio per bafe, e $4V\,\text{fen.}^2\mu + \frac{2F'\,\text{fen.}\,\phi\,\text{cof.}\,\Delta}{f^2}$ per altezza, farà manifeftamente proporzionale queft' altezza al quadrato della velocità con cui fi muove il naviglio; e però fi avrà tofto l' equazione

$$(B)\ldots\ldots 4V\,\text{fen.}^2\mu + \frac{2F'\,\text{fen.}\,\phi\,\text{cof.}\,\Delta}{f^2} = Z$$

§. XXII.

Quefta ci fa ftrada ad un' altra agevolmente, ficcome quella fenza di cui non era poffibile l' efprimere la vera velocità del centro della pala. E' vero che abbiamo efpreffa quefta velocità in iftato affoluto per $\sqrt{y}$; ma conviene riflettere, che in tanto può effere attiva ful navilio quefta velocità in quanto è maggiore di quella, con cui il navilio medefimo è incamminato, non effendo quefto il cafo del principiarfi il moto dalla quiete. E' meftieri dunque che l' effettiva velocità della pala fia

$$\sqrt{y} - \sqrt{(4V\,\text{fen.}^2\mu + \frac{2F'\,\text{fen.}\,\phi\,\text{cof.}\,\Delta}{f^2})} = B$$

Non può pertanto efprimerfi la refiftenza dell' acqua alla pala per $g^2y\,\text{fen.}^2\phi$ (§. XIV.), ma sì bene per la formula $g^2B^2\,\text{fen.}^2\phi$. Pofto ciò fi ripigli il principio noftro fondamentale (*Cap. II.*); e poichè M (*fig. III.*) è il centro fpontaneo, intorno a cui confideriamo farfi in ogni palata il movimento contemporaneo in parti oppofte del navilio da V verfo V', e del centro della pala da R verfo R', il qual centro di moto è pur neceffariamente centro di gravità degli oftacoli o delle refiftenze coftituite in V ed R (*ivi*), è manifefto che dette refiftenze dovranno effere tra di sè in reciproca ragione delle velocità contemporanee de' punti V ed R. In confeguenza effendo $\sqrt{V}$ la velocità del punto V, B

la velocità del punto R, sarà $\mathfrak{Q} : g^2 B^2 \text{ sen.}^2 \phi = B : \sqrt{V}$, e però $g^2 B^3 \text{ sen.}^2 \phi = \mathfrak{Q} \sqrt{V} \ldots\ldots (\Delta)$. Sostituendo pertanto in quest' equazione i valori di B e $\mathfrak{Q}$ si avrà l' equazione (C)

$$(C) \ldots\ldots f^3 \sqrt{V} (2f^2 V \text{ sen.}^2 \mu + F' \text{ sen.} \phi \text{ cos.} \Delta) - g^2 \text{ sen.}^2 \phi \text{ sen.} \mu$$

$$\left(f \sqrt{y} - \sqrt{(4f^2 V \text{ sen.}^2 \mu + 2F' \text{ sen.} \phi \text{ cos.} \Delta)}\right)^3 = 0$$

§. XXIII.

Ottenute due equazioni resta, che determiniamo la terza perchè col mezzo di tre equazioni tutta, siccome è evidente, possiamo svolgere e maneggiare la teoria, che abbiamo per mano. Ricorrendo pertanto al principio generale delle macchine pervenute al moto uniforme, di cui nel §. XIII, cioè che la forza necessaria per mantenerlo è quella precisamente che è necessaria per l' equilibrio, e combinandolo col nostro rifletteremo, che non avendo la forza motrice nel moto equabile del navilio a superare, come s' è detto, che la resistenza dell' acqua alla prora e alla pala per opposti versi, non abbiamo che ad eguagliare il momento della forza a quello delle resistenze per l' equilibrio. Intanto essendo (§. XIV.) $F' \text{ sen.} \phi$ l' espressione della forza motrice applicata in P (*fig. III.*), sarà il momento di questa forza

$$F' . PM \text{ sen.} \phi = F' \text{ sen.} \phi (a + MV).$$

Si è poi trovato essere $\mathfrak{Q}$ l' espressione (§. XIX.) della resistenza parziale contro cui dee agire la forza motrice col mezzo del remo in V; e però sarà $\mathfrak{Q} . MV$ il momento di questa resistenza. Ma dovendo distribuirsi la forza così nel vincere questa resistenza, come nel superare la resistenza dell' acqua al centro della pala, e ciò contemporaneamente; per il che si è dimostrato essere il centro spontaneo M in situazione, onde rendere uguali tra di sè i momenti di queste resistenze; è manifesta cosa, che per l' equilibrio dovrà uguagliarsi il momento della forza motrice ad entrambi questi eguali momenti intorno ad M, oppure al doppio di uno qualunque di essi. In conseguenza bisognerà che sia per l' equilibrio, cioè pel caso del moto equabile del navilio il momento della forza $F \text{ sen.} \phi (a + MV) = 2\mathfrak{Q} . MV$. Ora per trova-

re il valore di MV, essendo divisa $VR = b$ in M in reciproca ragione delle resistenze situate in V ed R, se si faccia $\mathfrak{Q} + g^2B^2 \text{ sen.}^2\phi : g^2B^2 \text{ sen.}^2\phi = b : MV$, sarà

$$MV = \frac{bg^2B^2 \text{ sen.}^2\phi}{\mathfrak{Q} + g^2B^2 \text{ sen.}^2\phi}$$

. Sostituendo dunque nell' equazione precedente il valore di MV, e mettendo $\frac{\mathfrak{Q}\sqrt{V}}{B}$ in luogo di $g^2B^2 \text{ sen.}^2\phi$ (§. XXI.), si avrà l' equazione (D)

$$(D) \ldots F' \text{sen.}\,\phi\left(aB + (a + B)\sqrt{V}\right) - 2b\mathfrak{Q}\sqrt{V} = 0,$$

ch' è la terza ricercata

§. XXIV.

Ma non è un solo il rematore, che può al medesimo remo applicarsi; e può a' remi collocati in diverse situazioni del navilio applicarsi diverso numero di rematori. Si chiami dunque n il numero totale de' rematori da una parte del navilio, n' il numero de' remi; è evidente che tutto può ridursi ad un sol remo concependolo afferrato da n rematori, e concentrando nella pala di lui un numero n' di superficie g^2. In conseguenza per rendere generale la soluzione bisogna adattare le formule a tutti i casi, e però convien mettere da per tutto nF' in luogo di F', $n'g^2$ in luogo di g^2, sì che le equazioni nostre generali, rimessi i valori, saranno

$$(I) \ldots \frac{1}{f^2}(4f^2V \text{sen.}^2\mu + 2nF' \text{sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta) - Z = 0$$

$$(II) \ldots f^3\sqrt{V}(2f^2V \text{sen.}^2\mu + nF' \text{ sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta) - n'g^2 \text{ sen.}^2\phi \text{ sen.}\,\mu \left(f\sqrt{V} - \sqrt{(4f^2V \text{sen.}^2\mu + 2nF' \text{ sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta)}\right)^3 = 0$$

$$(III) \ldots anF' \text{ sen.}\,\phi \text{ sen.}\,\mu \left(f\sqrt{y} - \sqrt{(4V\text{sen.}^2\mu + 2nF' \text{ sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta)}\right) + fnF' \text{ sen.}\,\phi \text{ sen.}\,\mu\,(a + b)\sqrt{V} - 2bf(2f^2V \text{sen}^2\mu + nF' \text{ sen.}\phi \text{ cos.}\,\Delta) = 0$$

§. XXV.

In queste tre equazioni abbiamo la soluzione completa della quistione, e in tutto il rigore matematico, che può esse-

re compatibile con l' estrema complicazione de' fisici elementi, che vi sono mescolati necessariamente. Prima pertanto di passare ad alcuna estimazione assoluta de' simboli introdotti, giova che ci fermiamo alquanto su la risoluzione generale di queste equazioni. E primieramente quanto alla velocità assoluta della pala dovuta all' altezza y possiamo agevolmente ricavarla dall' equazione (D) (§. XXIII.). Imperciocchè essendo da questa equazione

$$B = \frac{2b\mathfrak{Q} - (a+b)F' \text{sen.}\,\phi}{aF' \text{sen.}\,\phi} \quad \sqrt{V} = \sqrt{y} - \sqrt{(4V \text{sen.}^2\mu}$$

$$+ \frac{2F' \text{sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta}{f^2})$$ (§. XXII.) sostituendo il valore di $\mathfrak{Q}$, e generalizzando la forza secondo un numero n di rematori sarà

$$\sqrt{y} = \frac{f\sqrt{V}(4bf^2V \text{sen.}^2\mu + 2bnF' \text{sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta - n(a+b)F' \text{sen.}\,\phi \text{sen.}\,\mu)}{afnF' \text{sen.}\,\phi \text{ sen.}\,\mu}$$

$$+ \frac{anF' \text{sen.}\,\phi \text{ sen.}\,\mu \sqrt{(4Vf^2 \text{sen.}^2\mu + 2nF' \text{sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta)}}{afnF' \text{sen.}\,\phi \text{ sen.}\,\mu}$$

valore, il quale dipende dalla velocità $\sqrt{V}$, siccome è naturale, come da essa pure dipende la determinazione della velocità $\sqrt{Z}$ del navilio (§. preced.), e dagli altri valori assunti. Dobbiamo dunque rivolgerci a ricavare dalle equazioni precedenti l' equazione in V, che ci bisogna. Si ripiglino pertanto le equazioni (Δ) (§. XXII.), e (D) (§. XXIII.), che più agevolmente possono maneggiarsi, e non difficilmente, scacciando la lettera B, si perverrà all' equazione seguente

$$g^2V(2b\mathfrak{Q} - (a+b)F' \text{sen.}\,\phi)^2 = a^2F'^3 \mathfrak{Q} \text{ sen.}\,\phi$$

sostituendo in questa il valore di $\mathfrak{Q}$ (§. XIX.); e ponendovi il simbolo secondo il numero n de' rematori, e il numero n' de' remi, si avrà l' equazione finale in V della forma (R)

$$(R) \ldots n'g^2V(4bf^2V \text{sen.}^2\mu + 2bnF' \text{sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta$$

$$-(a+b)nF' \text{sen.}\,\phi \text{ sen.}\,\mu)^2 - a^2n^3F'^3 \text{sen.}\,\phi \text{ sen.}^2\mu(2f^2V \text{sen.}^2\mu$$

$$+ nF' \text{sen.}\,\phi \text{ cos.}\,\Delta) = 0$$

ed eccoci pervenuti alla finale equazione, dalla cui risoluzione dipende lo sviluppamento dell' intera teoria siccome il vedremo ne' seguenti Capitoli.

CAPITOLO V.

Rettificazione degli elementi assunti nel moto accelerato del navilio.

§. XXVI.

Ci atterremo alla soluzione, che abbiamo dato di questo quesito al §. XI. cui bisogna qui ripigliare con la fig. III. Ed in primo luogo dobbiamo considerare il punto V come sponda del navilio, a cui è applicato il remo, separando, siccome abbiamo fatto nel Cap. precedente, il movimento di questa da quello di lui ch' è composto (§. XV.) di due combinati insieme. E però cominceremo dal modificare la forza motrice F operante sul remo in P coll' angolo di direzione ϕ, sì che intendendo di ridurla al punto V, diverrà $\frac{MP}{MV} . F \text{ sen.} \phi$ la vera forza sollecitante il navilio in V immediatamente; ma non dobbiamo qui tralasciare di debilitare questa forza per conto dell' attrito del remo alla sponda, come s' è fatto nel §. XVII, perchè non ha luogo la considerazione nè del moto equabile ivi contemplato, nè quella dell' equilibrio equivalente, e però sarà ella $\frac{MP}{MV}(F - p) \text{ sen.} \phi$, cioè $\frac{MP}{MV}(F' - p) \text{ sen.} \phi$, ridotta a continuità (§. XX.). Ma come s' è fatto della forza motrice, così fa d' uopo determinare, e ridurre in V il complesso di tutti gli ostacoli distribuiti per diverse parti del remo, dandolo ivi a carico della forza; di modo che dividendo questa per tale complesso si abbia la forza acceleratrice assoluta costituita in V. L' inerzia intanto inseparabile dalla forza motrice, ch' è l' uomo, il quale dee muovere una parte di sè stesso, s' è detta ω, ed accompagna in V la forza nel trasporto di lei dal punto P; nè possiamo trascurarla come nel caso del moto equabile (§ XVII.). Ma non possiamo neppure trascurare l' inerzia

del remo, cui abbiamo detto N, e però riducendola al punto V, se fosse questo punto sensibilmente distante dal centro di gravità di lui, la si denomini N', sì che $\omega + N'$ sarà l'aggregato di queste due resistenze in V. Resta da mettervi la massa, e le resistenze del navilio alla prora, e alla pala nel cacciar l' acqua. Ma come abbiamo necessariamente assunto il sistema di due remi uno a destra, e l' altro a sinistra della direzione della chiglia (*fig IV.*), non può darsi a carico di ciascheduna delle forze in V, V', che la metà della massa M del navilio; e però di nuovo per conto di un remo sarà $\omega + N' + \frac{M}{2}$ il complesso degli ostacoli in V, non computate ancora le resistenze dell' acqua.

§. XXVII.

Quanto dunque alla resistenza per parte della pala, sarà ella nel centro $R = g^2 \text{sen.}^2\phi (RR')^2$ (§. X. *fig. III.*). Ma facendo $VM : MR = g^2 \text{sen.}^2\phi (RR')^2$: ad un quarto proporzionale, sarà $\frac{MR}{VM} \cdot g^2 \text{sen.}^2\phi (RR')^2$ l' espressione di detta resistenza trasportata in V. E quanto alla resistenza per parte del navilio dobbiamo definire la parte, che cade a carico di un remo nel punto V. Per ciò fare esattamente dobbiamo considerare, che lo spazio iniziale dS percorso dal punto V in un tempetto infinitamente piccolo può assumersi come fatto di moto uniforme. Per la qual cosa ripigliando il ragionamento fatto nel §. XIX del Cap. precedente, e rifacendo la costruzione ivi esposta pel moto uniforme finito, si troverà pel piccolo moto uniforme iniziale del navilio, che se esprimasi con lo spazio iniziale dS la velocità del punto V, la velocità del moto composto di lui in quel medesimo tempetto sarà $2 \text{sen.} \mu \, dS$, e però $f.^2 4 \text{sen.}^2 \mu (dS)^2$ la resistenza di lui perpendicolare e diretta. Ma torna lo stesso o si detragga dalla forza, che dee vincere questa resistenza, quell' azione che si esercita nel far retrocedere co' piedi il navilio, di che s' è parlato nel §. XVI, o si aggiunga altrettanto di resistenza a peso di detta forza, quant' è l' azione con cui è respin-

to

to il navilio; e però essendosi trovato (§. XVI.) essere la forza respignente per conto di due remi $2F'$ sen. ϕ cos. Δ, sarà ella in questo caso $n(F'-p)$ sen. ϕ cos. Δ, e però

$$f^2\left(4\,\text{sen.}^2\mu\,(dS)^2+\frac{2\,(F'-p)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\Delta}{f^2}\right)$$ sarà la resistenza totale del navilio nel primo moto elementare. Facciamo pertanto, che QN (*fig. IV.*) rappresenti, come prima, questa resistenza totale. Operando come nel §. XIX. troveremo, che la formula

$$f^2\left(2\,\text{sen.}\,\mu\,(dS)^2+\frac{(F'-p)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\Delta}{f^2\,\text{sen.}\,\mu}\right)=R$$

rappresenta la resistenza parziale del navilio, che va a carico di ognuno de' punti laterali V, V' ove sono applicati i remi.

§. XXVIII.

In conseguenza la somma di tutti gli ostacoli trasportati in V sarà

$$\omega+N'+\frac{M}{2}+\frac{MR}{VM}\cdot g^2\,\text{sen.}^2\,\phi\,(RR')^2+R=L.$$

Dividendo pertanto la forza motrice $(F'-p)$ sen. $\phi\cdot\frac{MP}{VM}$ per questo aggregato, sarà $\frac{MP\,(F'-p)\,\text{sen.}\,\phi}{VM.L}$ la forza acceleratrice assoluta costituita in V. E se di nuovo si divida questa forza acceleratrice per la distanza VM, sarà $\frac{(F'-p)\,\text{sen.}\,\phi.\,MP}{\overline{VM}^2\,.L}$ la forza acceleratrice angolare. Resta dunque, che si determinino le MR, MP, VM, RR' in valori della quistione. E' certo pertanto, che dovendo essere intorno al centro spontaneo M uguali i momenti delle resistenze costituite in V ed R, dovrà la linea VR, che abbiamo detta b, intendersi divisa in M in reciproca ragione di dette resistenze. E però, essendo g^2 sen. $\phi\,(RR')^2=I$ la resistenza in R, e $\frac{M}{2}+f^2\big(2$ sen. μ

$(dS)^2 + \frac{(F' - p)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\Delta}{f^2\,\text{sen.}\,\mu}) + N' = H$ il complesso delle resistenze parziali del navilio concentrate in V, lasciando sussistere in P la forza accompagnata della sua inerzia ω, se si faccia

$$H + I : I = b : VM$$
$$H + I : H = b : MR$$

sarà $VM = \frac{bI}{H + I}$, $MR = \frac{bH}{H + I}$, e

$$VM : MR = I : H = VV' : RR' = dS : RR'$$

e però $I . RR' = H . dS = g^2\,\text{sen.}^2\phi\,(RR')^3$, e $RR' = \sqrt[3]{\frac{H . dS}{g^2\,\text{sen.}^2\phi}}$.
Se dunque si ponga nell' espressione I il valore di RR', diverrà ella

$$\sqrt[3]{H^2\,dS^2 g^2\,\text{sen.}^2\phi} = I'$$

Quindi $VM = \frac{bI'}{H + I'}$, $MR = \frac{bH}{H + I'}$, e $MP = VM + PV = a + \frac{bI'}{H + I'} = \frac{aH + aI' + bI'}{H + I'}$. Posti tutti questi valori nell' espressione antecedente L, diverrà ella $\omega + 2N' + M + 2R$, e l' espressione della forza acceleratrice angolare sarà

$$\frac{(F' - p)\,\text{sen.}\,\phi\,MP}{\overline{VM}^2 . L} = \frac{(F' - p)\,\text{sen.}\,\phi\,(aH + aI' + bI')\,(H + I')}{bI'\,(\omega + 2N' + M + 2R)} = K$$

funzione di dS, e quantità invariabili del quesito. Ora Z è l' altezza dovuta alla velocità finale acquistata dopo che sia percorso dal navilio lo spazio S; ed è pe' principj di Dinamica $\frac{dS}{dZ}$ uguale alla forza acceleratrice K. Dunque si avrà l' equazione $\frac{dS}{dZ} = K$, e $\frac{dS}{K} = dZ$, e integrando

$$(P) \ldots\ldots Z = \int \frac{dS}{K} + \text{cost. arb.}$$

§. XXIX.

Se dunque ſia come prima n il numero de' rematori, n' il numero de' remi da una parte del navilio, e ſi metta nel valore di K $n(F'-p)$ in luogo di $F'-p$, $n'g^2$ invece di g^2, e vi ſi mettano gli altri valori di H, I', ed R, sì che K diventi K', dopo tutte queſte ſoſtituzioni sarà

$$(P')\ldots\ldots Z=\int\frac{dS}{K'}+\text{coſt. arb.}$$

l' equazione di relazione tra S e Z. In conſeguenza (§. XI.) il tempo finito impiegato nel percorrere queſto ſpazio ſi trarrà dall' equazione

$$T=\int\frac{dS}{\sqrt{Z}}+\text{coſt. arb.}$$

§. XXX.

Ed ecco riſoluta in tutta la ſua eſtenſione anche la parte di queſta teoria, che riſguarda il principio del moto del navilio a remi principiando dalla quiete. Imperciocchè avendo ſeparato queſta dall' altra, in cui il navilio prende e conſerva il moto uniforme con la velocità acquiſtata in fine della primitiva accelerazione, e avendole trattate entrambe co' principj proprj, non reſta che a collegarle inſieme per mezzo del comune elemento $\sqrt{Z}$, che è la velocità finale acquiſtata dal navilio dopo percorſo di moto accelerato lo ſpazio S, e diventa poi la velocità coſtante nel ſucceſſivo moto uniforme. Ma il valore di Z è ſempre in pronto dall' equazione (I) del §. XXIV, in cui dietro alla riſoluzione dell' equazione (R) del §. XXV ſiaſi ſoſtituito il valore di V, e però non ſi avrà che a integrare la funzione differenziale $\frac{dS}{K'}$ della ſola variabile S, onde avere in quantità cognite lo ſpazio S; e toſto poi anche il valore del tempo T.

CAPITOLO VI.

Riduzione della teoria al fatto, e applicazione alla pratica.

§. XXXI.

Sciolti i nodi più complicati intorno al movimento de' navigli a remi, or ci bisogna venire al fatto, e avvicinare la teoria a ciò che realmente accade in questa sorta di navigazione. E primieramente è mestieri che ad alcuni simboli delle nostre formule si dia un conveniente valore assoluto per tutti i casi, lasciando indeterminati gli altri, sì che sieno suscettibili di valore diverso secondo i diversi casi. Ripigliamo pertanto l'equazione (*R*) (§. XXV.)

$$(R) \ldots n'g^2 (4bf^2 V \text{sen.}^2 \mu + 2bnF' \text{sen.} \phi \text{ cos.} \Delta$$
$$-(a+b)nF' \text{sen.} \phi \text{ sen.} \mu)^3$$
$$- a^3 n^3 F'^3 \text{sen.} \phi \text{ sen.}^2 \mu (2f^2 V \text{sen.}^2 \mu$$
$$+ nF' \text{sen.} \phi \text{ cos.} \Delta) = 0$$

ch' è finalmente il cardine di tutta la teoria, e veggiamo in primo luogo di sostituire numeri assoluti in luogo de' simboli ϕ, μ, Δ. E quanto alla lettera ϕ, esprime ella l' angolo, che fa la direzione del remo con la chiglia (§. XIV.), il quale realmente è variabile, come si è detto. Ma avendo fatto osservazione accurata sull' escursione del capo interno di un remo in azione in una Veneta Galera, mi sono accertato che non arriva mai il remo alla sua massima e più forzata obbliquità a fare un angolo con la chiglia maggiore di 70 gradi; e però se per un medio costante si assuma un angolo di 80, saremo più vicini al vero, che non avverrebbe pigliando la direzione di lui sempre perpendicolare (Mem. di *Berl.* pag. 197.), sì che essendosi presa l' unità per raggio potrà pigliarsi sen. $\phi = \frac{49}{50}$. Quanto poi all' angolo μ che fa in *V*

(*fig. IV.*) la direzione del moto del punto V nel navilio con la retta AB perpendicolare alla chiglia, si rifletta, che tendendo il punto V a muoversi intorno al centro spontaneo M (*fig. III.*) è giusto che si pigli per la direzione di lui la tangente DV all' arco ch' egli prende a descrivere, la quale è perpendicolare al remo PR in V. In conseguenza prolungando RP finchè s' incontri con la chiglia TS in S, sarà l' angolo $DVT = \text{ang.}\, TSV$, cioè $\mu = \phi$. E come questo si assume costantemente di 80°, potrà pure quello pigliarsi di tal valore, e però sarà anche $\text{sen.}\,\mu = \frac{49}{50}$ senza timore di errore.

Resta dunque il solo $\text{cos.}\,\Delta$ da definirsi (§. XVI.). Ho voluto su questo pure instituire qualche osservazione in questo modo. Vedendo che l' angolo Δ era sommamente variabile, dipendendo dal più o meno d' inclinazione che fa di sè l' uomo nel distendersi col corpo spingendo il remo, presi a riconoscere la relazione tra le due linee (*fig. V.*) AC, BC calando un perpendicolo dall' estremità delle mani stesse del rematore in azione fino al pavimento del navilio, e trovai avere la AC or maggiore, or minor ragione alla BC secondo le varie, e non determinabili circostanze sì del navilio, che del remare. Quindi è che senza alcuno scrupolo assumeremo quelle per eguali, e Δ per un angolo semiretto in via di angolo medio costante. Sarà dunque $\text{cos.}\,\Delta = \frac{7}{10}$ prossimamente. Sostituendo questi valori nell' equazione (R), si otterrà un' equazione non contenente, che gli elementi naturali e proprj del navilio, secondo il caso; equazione che alla massima generalità unisce tutto il rigore possibile in sì fatta materia.

§. XXXII.

Ma essendomi proposto di svolgere diversi casi di questa teoria, a solo titolo di schifare l' inutile fatica di lunghe numeriche calcolazioni, supporremo per facilità negli esempj, che gli angoli di direzione ϕ, μ sieno retti, e sia $\Delta = 60°$. L' equazione (R) si trasformerà nell' equazione (S)

$$(S) \ldots\ldots 128 b^3 f^6 n' g^2 V^4 - 96 a b^2 f^4 n F' n' g^2 . V^3$$
$$+ 24 a^2 b f^2 n^2 F'^2 n' g^2 . V^2 - (2 a^3 n^3 F'^3 n' g^2$$
$$+ 4 a^3 n^3 F'^3 f^2) V - a^3 n^4 F'^4 = 0$$

che è più trattabile, essendo sempre in pronto l'equazione (*R*) per l'ultima esattezza ne' casi di vera occorrenza per la pratica.

§. XXXIII.

Molte importantissime considerazioni ci si porgono da fare nel maneggio di questa equazione. Tutto vi può far figura di cosa indeterminata, e tanti sono i problemi, che possono risolversi, quanti sono i simboli assunti. Basterà qualche esempio per conoscere il buon uso che se ne può fare, senza che infruttuosamente si vadano svolgendo diversi casi, che involgono la sola fatica del calcolo. Ma sarà però utile cosa e necessaria, che si facciano alcune dichiarazioni, le quali aprono la via di fare ogni sorta di esperimento intorno alle formule trovate in tutte le particolari occorrenze della pratica. Nel trattare l'equazione precedente due vie possono prendersi per l'omogeneità; una è quella d' introdurvi de' pesi assoluti, l' altra di procedere per misure lineari. Volendo introdurre per la forza motrice un peso equivalente in libbre sarebbe necessario di sostituire per tutte le quantità di questa forma $f^2 R$, $g^2 Q$ il peso in libbre, che ha un prisma regolare d' acqua avente f^2, g^2 per base, ed R, Q per altezza. Ma trattando tutto con misure lineari, come di piede e parti di piede, può la lettera F' esprimere l' altezza, da cui cadendo liberamenre un grave acquista in fine della caduta la celerità, con cui muove le sue braccia il rematore nel remare: misura, a cui non è difficile il trovare un peso equivalente. In questo modo diventa pure omogeneo con V il valore di F', e con tutti gli altri. A questo modo io mi atterrò in appresso lasciando la libertà a chi piacesse di far uso dell'altro. Posto ciò, è d' uopo considerare, che tanto è minore la forza dell'uomo, quanto è più grande la velocità con cui dee esercitarla; e che però con una data velocità non potrà egli esercitare, che una data quantità di forza. Se dunque si

chiami A il peſo maſſimo, che può da un uomo eſſere tenuto ſoſpeſo lungamente con le braccia ſenza grave ſtento, purchè non gl' imprima alcun moto, e $\sqrt{B}$ la maſſima velocità di cui ſono capaci le braccia d' un uomo, ſe abbia a muoverle in aria ſenza alcuna ſtraniera reſiſtenza da vincere, è certo che detta A' la forza delle braccia d' un uomo, $\sqrt{F'}$ la velocità con cui dee muoverle in un caſo particolare, ſe ſia $A'=A$, l' uomo non può con le braccia eſercitare alcun movimento, eſſendo tutta la forza di lui impiegata nel reggere il peſo; e ſe ſia $B=F'$, non può egli eſercitare altra forza A', eſſendo tutto il ſuo sforzo meſſo nel muovere sè ſteſſo con quella maſſima velocità. Per verità non poſſono sì facilmente definirſi nè A, nè B per la grande variabilità loro, e non una ſolamente è la funzione con cui queſte alternative poſſono eſprimerſi adequatamente. Pure poſſiamo in via di eſempio afferrare qualche coſa, e prendendo per eſpreſſione generale col Sig. *Eulero* la formula $A'=A\left(1-\frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{B}}\right)^2$ può ella ſoddisfare al biſogno; mentre poſto $F'=0$, diventa $A'=A$, poſto $B=F'$ diventa $A'=0$, e poſto F' minore di B, A' ha un valore ſempre minore di A, e più o men grande ſecondo ch' è minore o maggiore la ragione $\sqrt{F'}$ a $\sqrt{B}$. In queſto modo poſſiamo ridurre a peſo la forza dell' uomo, che ſi foſſe eſpreſſa per via di velocità, e per converſo, come vedremo, ſtabilito che ſiaſi il valore di A, e di B. Aſſumiamo, che non è fuor de' limiti, $A=$ libb. 50, $\sqrt{B}=8$ piedi del Reno in un minuto ſecondo, eſſendo il piè del Reno a quel di Parigi come 1000 : 1034,93. La noſtra formula diverrà $A'=50\left(1-\frac{\sqrt{F'}}{8}\right)^2$, e biſognerà eſprimere $\sqrt{F'}$ in piedi da percorrerſi uniformemente in un minuto ſecondo, il cui numero ſia m, e però la formula ſarà $A'=50\left(1-\frac{m}{8}\right)^2$. Se dunque foſſe $m=4$ piedi, ſarà la

forza dell'uomo equivalente a libb. $12\frac{1}{2}$; e se fosse necessario il valore di libb. 16 per la forza dell'uomo, non potrà la sua velocità esser maggiore di piedi $3\frac{1}{2}$ per secondo. Avendo pertanto destinato di misurare per questo verso la forza che ho detto F nelle formule precedenti, e diventando F' l'altezza dovuta alla velocità con cui debbono muoversi le braccia del rematore, sarà agevole il ridurre la forza motrice a un peso conosciuto.

§. XXXIV.

Per ciò fare, e perchè anche gli altri simboli V, Z, y entrano ne' nostri computi sotto figure di altezze dovute a certe velocità, è bene che si riducano le espressioni a forme trattabili. E' noto che un grave nel cadere liberamente dalla quiete per l' altezza di piedi 15,625 del Reno non impiega che un minuto secondo, e che con la velocità acquistata in fine di questa caduta percorrerebbe nello stesso tempo di moto uniforme piedi 31, 25. Ciò presupposto, sia in generale m il numero di piedi del Reno, che percorre di moto uniforme nel tempo t un grave con la velocità dovuta all' altezza F', sarà

$$t = \frac{m}{\sqrt{F'}} = \frac{\sqrt{15,625}}{31,25} \cdot \frac{m}{\sqrt{F'}} = \frac{125m}{31,25\sqrt{1000F'}}$$

$= \frac{4m}{\sqrt{1000F'}}$, e però, fatto $t = 1''$, sarà $\sqrt{1000F'} = 4m$, e

$F' = \frac{16m^2}{1000} = \frac{2m^2}{125}$, sì che dato il numero di piedi del Reno m percorsi uniformemente in un secondo, si avrà in piedi corrispondenti l' altezza F', cui tale velocità è dovuta, e per converso; il che è di comodità ne' calcoli indicibile, valendo per tutte le altezze, come sono le assunte V, Z, y. Ciò premesso rivolgiamoci agli esempj.

I. *Esempio*

I. *Esempio*

Trovare la velocità d' un navilio spinto uniformemente a remi, in cui 24 sono i rematori, ed altrettanti i remi; la superficie f^2 presa alla massima ampiezza della prora di 6 piedi quadrati; di $\frac{1}{4}$ di piede quadrato la superficie g^2 della pala, che s' immerge; di piedi quattro la parte interna a del remo, e di piedi 7 l' esterna b. Sarà $n = n' = 12$.

Si sostituiscano questi valori nell' equazione (S); e la relazione tra la forza motrice F', e l' altezza V dovuta alla celerità del punto, su cui posa il remo nel navilio, sarà
$(\mathfrak{Q}) \ldots 7^3.9V^4 - 6.9F'V^3 + 18.36F'^2V^2 - 360F'^3V - F'^4 = 0$
Essendo documentati al §. XXXIII, che conviene economizzare la forza dell' uomo, sì che prenda colle braccia una velocità minore di 8 piedi all' m'', sia la velocità dovuta all' altezza F' di soli piedi 2 per secondo. Si troverà (§. preced.) essere $F' = \frac{8}{125}$, e corrispondere (§. XXXIII.) al peso di libb. 28. circa. Sostituito questo valore per F' e risoluta l' equazione si troverà, che una delle radici di lei è prossimamente $V = \frac{1}{375}$. Determinato questo valore per V si ripigli (§. XXIII.) la formula

$$(I)\ \frac{1}{f^2}(4f^2V\,\text{sen.}^2\mu + 2nF'\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\Delta) - Z = 0$$

e sostituendovi i valori sen. μ, sen. ϕ, cos. Δ (§. XXXII.), si avrà $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$; e finalmente fatto $F' = \frac{8}{125}$, $f^2 = 6$, $V = \frac{1}{375}$, $n = 12$, si troverà $Z = \frac{18}{125}$. Dunque dovrà essere $\frac{18}{125} = \frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.), e $m = 3$; e però la velocità del navilio sarà di tre piedi per minuto secondo.

II. Esempio.

Pigliamo per secondo esempio il caso del Sig. *Chazelles* riferito nelle Mem. della Real Soc. di Parigi per l' anno 1702: caso preso in considerazione così dal Sig. Daniele *Bernoulli* come dal Sig. *Eulero*. Offervò il Sig. *Chazelles*, che una palata con 26 remi per ogni lato, e cinque rematori per remo non faceva che 72 pertiche per minuto primo a voga forzata, cioè piedi $7\frac{1}{2}$ del Reno circa per minuto secondo. La parte interna del remo era di 12 piedi, e di 24 l' esterna. Calcola egli, che la superficie d' ogni pala operativa nel cacciar l' acqua fosse di piedi quadrati $2\frac{1}{2}$. Non essendo lecito il supporre, che la superficie resistente alla prora fosse di tale o di tal altra dimensione, il che lascerebbe un ragionevole sospetto, che la si adattasse alla teoria, io mi limito a cercarla direttamente, giacchè non ne fa alcun cenno il Sig. *Chazelles*, in questo modo. Dovendo essere Z l' altezza dovuta alla proposta celerità della Galera, sarà $Z = \frac{2m^2}{125}$ $= \frac{2(7\frac{1}{2})^2}{125}$ (§. XXXIV.) $= \frac{9}{10}$; e poichè $n = 130$, sostituendo questi valori nell' equazione $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$, si troverà $V = \frac{9f^2 - 1300\,F'}{40f^2}$. E qui prima d' inoltrarci forz' è definire un valore per F'. De' cinque rematori l' ultimo a capo del remo è più in azione di tutti, e confessa il Sig. *Chazelles*, che *celui qui est le plus près du point d' appui ne fait presque point de force ni de mouvement*. Riflettendo che il primo rematore faceva in questa voga forzata sei piedi in $\frac{5}{6}$ di minuto secondo, come appunto calcola il Sig. *Bernoulli*, possiamo assai ragionevolmente attribuire ad ognuno de' cinque rema-

tori tre piedi per secondo di velocità ragguagliata e continua (§. XX.); e però dovendo essere $\frac{2m^2}{125} = F'$, sarà $F' = \frac{18}{125}$, e però $V = \frac{45f^2 - 936}{200f^2}$. Si ripigli ora l'equazione (S), e vi si sostituiscano i valori $n = 130$, $n' = 26$, $g^2 = 2\frac{1}{2}$, $F' = \frac{18}{125}$, e il valore trovato per V; e perchè cinque sono i rematori, che tengono afferrato il remo disugualmente lontani dal centro spontaneo, si assuma l'intervallo $a = 10$ piedi, e l'intervallo $b = 20$ piedi. Ma senza fare altre sostituzioni nell'equazione (S), che quella di $V = \frac{45f^2 - 936}{200f^2}$, osservo, che si può trovare il valore di f^2 immediatamente, convertendosi tosto l'equazione (S) nell'equazione (T)

$$(T) \ldots\ldots 128b^3f^6n'g^2 \left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2}\right)^4$$

$$- 96ab^2f^4nF'n'g^2 \left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2}\right)^3$$

$$+ 24a^2bf^2n^2F'^2n'g^2 \left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2}\right)^2$$

$$-(2a^3n^3F'^3n'g^2 + 4a^3n^3F'^3f^2)\left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2}\right) - a^3n^4F'^4 = 0.$$

Se si faccia pertanto la superficie $f^2 = 20\frac{4}{5}$ piedi quadrati, i primi quattro termini svaniscono, e rimane l'ultimo termine negativo. E sol che si faccia $f^2 = 20\frac{7}{9}$ piedi quadrati, i quattro primi termini riescono tutti positivi, e presi insieme molto maggiori dell'ultimo termine negativo. In conseguenza una delle radici dell'equazione determinata (T), in cui f^2 è l'incognita, è maggiore di $20\frac{7}{9}$, e minore di $20\frac{4}{5}$. E però la superficie resistente della Galera sperimentata dal Sig.

Chazelles era tra questi limiti costituita. Per questa via si troverebbe, che non assegnando di velocità ragguagliata e continua (§. XX.) ad ogni rematore, che 2 piedi per secondo, cioè ponendo $F' = \frac{8}{125}$, avrebbe dovuto essere la superficie f^2 tra $9\frac{11}{45}$, e $9\frac{10}{45}$ piedi quadrati. Si viene quindi reciprocamente in cognizione, che perchè potesse aver luogo la supposizione di $f^2 = 16$ piedi quadrati fatta dal Sig. *Eulero* (pag. 204. §. XXX.) per la superficie di questa medesima Galera, avrebbe dovuto essere prossimamente $F' = \frac{14}{125}$; e perciò la velocità di ogni rematore quasi di $2\frac{3}{4}$ piedi per secondo; e sarebbe stato in conseguenza (§. XXXIII.) di libb. 21 crescenti il peso equivalente allo sforzo esercitato da ognuno di loro; risultamenti che se fossero provenuti dalla teoria, come i nostri, basterebbero a far fede amplissima della bontà di lei; ma è dovuta solamente alla sagacità dell' incomparabile Sig. *Eulero* la discreta supposizione, ch' ei fa della superficie in quistione di 16 piedi quadrati, che dal calcolo non sarebbe mai proceduta direttamente.

III. Esempio.

Si dimanda qual forza avrebbe dovuto impiegare ogni rematore nella Galera del Sig. de *Chazelles*, perchè la velocità di lei fosse di 10 piedi per ogni minuto secondo. Nella formula $\frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.) si faccia $m = 10$; sarà $Z = \frac{8}{5}$, e però nell' espressione $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$ (*I. Esempio*) si ponga $n = 130$, $f^2 = 20$ piedi quadrati, $Z = \frac{8}{5}$; si troverà $V = \frac{16 - 65F'}{45}$. Quest' espressione è sommamente comoda, siccome quella, che sostituita nell' equazione (*S*), come abbia-

mo ſatto nell' eſempio precedente, ci diſpenſa dalla riſoluzione dell' equazione. In fatti meſſo per V in (S) il valore trovato, abbiamo

$$128b^3f^6n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^4-96ab^2f^4nF'n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^3$$

$$+24a^2bf^2n^2F'^2n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^2$$

$$-(2a^3n^3F'^3n'g^2+4a^3n^3F'^3f^2)\left(\frac{16-65F'}{45}\right)-a^3n^4F'^4=0$$

Se pertanto ſia $F'=\frac{16}{65}$, tutto ſvaniſce fuorchè l'ultimo termine negativo; e ſe ſia $F'=\frac{17}{65}$, tutti i termini fuorchè l'ultimo diventano poſitivi, e di eſſo maggiori preſi inſieme. Di modo che una delle radici F' è coſtituita tra i limiti $\frac{16}{65}$, $\frac{17}{65}$. In conſeguenza, preſo il limite minore per la radice, ſarà $F'=\frac{16}{65}=\frac{2m^2}{125}$, e proſſimamente $m=4$ piedi. Converrebbe dunque, che con le braccia prendeſſe ogni rematore quaſi quattro piedi per ogni minuto ſecondo di velocità ragguagliata e continua (§. XX.), ſe prima ne aveva tre percorrendo il navilio nello ſteſſo tempo $7\frac{1}{2}$ piedi del Reno; la qual velocità è troppo grande. Imperciocchè eſſendo $F'=\frac{16}{65}=\frac{t}{T}F$ (§. XX.), per quanto celeremente poſſano i rematori trar dall' acqua, e rimettere in acqua il remo, perchè pochiſſimo ſtia in aria, è aſſai difficile, che ſia $t:T=1:2$; per il che il Sig. *Bernoulli*, e il Sig. *Eulero* aſſumono coſtantemente $t:T=1:3$, ragione pure non eſatta, come ho cercato di accertarmene poſſibilmente nella voga forzata di molti navigli; e però pigliando la ragione $T:t$ un po' più che dupla, e un po' men che tripla, cioè come $5:2$ per eſempio, do-

vrebbe essere $F' = \frac{16T}{65t} = \frac{5.16}{2.65} = \frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.), e $m = 6$ piedi crescenti per secondo, ch' è una velocità ragguagliata troppo forte per le braccia de' rematori, giacchè importa una celerità di ben nove piedi per secondo a carico del primo rematore, che non è soffribile.

§. XXXV.

E' inutile, che più mi diffonda in esempj, potendo ognuno risolvere da sè tutte le quistioni più importanti, che possono farsi intorno alla navigazione a remi col mezzo delle formule nostre, sì per definire il movimento de' navigli nel principio, allorchè partono dalla quiete, come in appresso nel moto uniforme ch' essi prendono, e mantengono successivamente. Così può conoscersi col benefizio di loro qual sia la superficie g^2 da darsi al remo, quale il numero di essi n', quale il numero n de' rematori, e simili elementi, onde obbligare il remigante a moderato sforzo nelle lunghe navigazioni, e fare con un navilio di data costruzione il maggior viaggio, che può essere conceduto. E similmente potrebbero intraprendersi diverse soluzioni ricercando il massimo o il minimo negli elementi a piacere; ma non vo' abusare del tempo, contentandomi di avere svolto nel modo che ho potuto migliore la teoria, e di avere somministrato i mezzi di farlo non difficilmente. Un solo oggetto dimanda ancora una ben seria discussione, prima di dar fine, da cui m' asterrei volentieri, se non potesse attribuirmisi a colpa il tacere su cosa, che fa tanta parte della Memoria del Sig; *Eulero*, e spezialmente delle sue finali conclusioni in questa materia. L' oggetto risguarda la proporzione tra la parte esterna e l' interna del remo, dal punto del navilio, sul qual esso riposa: proporzione, cui quel grande Geometra cerca per ogni verso di bene stabilire, e su cui fonda l' essenziale di questa navigazione. Non ne abbiamo fatto cenno in alcun luogo, per trattarne qui in fine, come la dignità della cosa richiede. Or poi che siamo certi essere il remo *PR* (*fig. III.*) una verga interposta tra due ostacoli da muovere in contrarie parti, uno de' quali è il navilio medesimo su cui posa il remo; e che

nella palata mentre il capo del remo dal punto P ſi trasferiſce in P', la ſponda del navilio V in V', il centro della pala da R in R', v' ha un punto immobile, come M fuor del navilio, che ho detto centro ſpontaneo, intorno al quale ſi fanno tutti queſti movimenti; è manifeſto che cangia aſpetto la coſa, e il punto V non è più che un ſito, ov' è applicato il remo PR ad una delle reſiſtenze del ſiſtema, sì che le lunghezze PV, VR vanno conſiderate diverſamente, che non facevaſi per l' innanzi, allorchè pareva che il punto V faceſſe altra funzione. Fa d' uopo pertanto conſiderare la quiſtione ſotto due differenti aſpetti, ch' ella può avere di ſpeculazione, e di pratica. Altro è in fatti l' aſſumere una verga immateriale PR pel remo ſteſa ſopra un piano, e la forza motrice P aſtratta e diſgiunta dal rematore; e tutt' altro il caſo d' una forza, che dee eſercitarſi in un tal modo dalle braccia d' un uomo ſopra un remo reale, ch' è un corpo peſante applicato alla ſponda di un navilio. Eſaminiamo per un poco l' una e l' altra condizione, e vedremo poi a quali concluſioni ci condurrà queſt' eſame. Nel primo caſo ſia la verga infleſſibile cogli oſtacoli in V ed R coſtituita in un medeſimo piano con la direzione pure della forza immateriale poſta in P. Dicaſi M la reſiſtenza in V, R la reſiſtenza in R, e tuttavia $PV = a$, $VR = b$. Per la natura del centro ſpontaneo M (§. VII.) ſi troverà $VM = \frac{bR}{M+R}$, $MR = \frac{bM}{M+R}$, e $P.PM = P(PV + VM) = P.\frac{aM+(a+b)R}{M+R} = 2M.\frac{bR}{M+R}$ per l' equilibrio, cioè pel caſo del moto uniforme nella navigazione a remi, e però ſarà

$$aPM + aPR + bPR - 2MbR = 0$$

cioè $P = \frac{2bMR}{aM+aR+bR}$. Sia b moltiplice di a, come ſarebbe $b = na$, eſſendo n numero maggiore dell' unità. Soſtituendo queſto valore per b riſulta la formula $P = \frac{2nMR}{M+(n+1)R}$, da cui ſi rileva, che quanto maggiore del ſegamento PV ſarà il ſegamento VR, tanto più di forza P ſi richiederà per

l' equilibrio co' medesimi ostacoli M ed R. Ciò si fa maggiormente chiaro dal ricavarsi ancora dalla formula superiore

$$\frac{a}{b} = \frac{R(2M - P)}{P(M + R)}$$

mentre quanto maggior ragione la parte interna a della verga avrà all' esterna b, tanto più sarà $R(2M - P) > P(M + R)$, e però vie minore potrà essere la potenza P della quantità $\frac{2MR}{M + 2R}$. Ciò è interamente contrario non solamente a quanto risulta dalla teoria del Sig. *Eulero*, ma eziandio all' esperienza comune. Ma ecco il vero scioglimento di questo nodo; e per questo ho detto, che bisognava considerare questo articolo e dal canto speculativo, e dal pratico insieme. E' fuor di dubbio, che contemplato il suggetto in via astratta, non può avervi Meccanico, il quale, interposta una verga PR sopra un piano tra due ostacoli da muoversi V, R per opposti versi da una potenza in P, non riconosca subito la realtà del centro spontaneo M, che abbiamo indicato, e non trovi pure reale il vantaggio per la potenza, che l' intervallo PV sia maggiore dell' intervallo VR. E questo inconcusso vantaggio è pure reale nella navigazione, ma non può essere atteso in pratica per le seguenti ragioni. La potenza motrice in pratica è un uomo di altezza determinata PZ (*fig.* VI.), il quale dee posare sul pavimento del navilio. Il navilio ha necessariamente una sponda costituita a qualche altezza FV dalla superficie dell' acqua, su cui dee appoggiarsi il remo. Che giova, se, essendo per l' altezza dell' uomo determinato il sito dell' applicazione in P, e per la posizione data della sponda V determinata pure dal più al meno la lunghezza esterna del remo VR, insegni la teorica, che vie maggior vantaggio avrebbe la potenza quanto maggiore dell' esterna fosse la lunghezza interna VP', mentre repugna, che possa il rematore collocarsi in P'? Ed ecco come, e perchè, fermo il risultamento vero e giusto della teoria, è costretta la pratica a rinunciare al beneficio, che quella le indica, adattandosi alla struttura dell' uomo, alla forma del navilio, e all' altezza della sponda dal pelo dell' acqua; e per quello ancora che cresce coll' allungarsi del remo il peso da maneggiare, l' inerzia

da

da vincere, e la resistenza del soffregamento alla sponda, mentre il remo è fuor d'acqua, come abbiamo accennato (§. XVII). Quindi è che per soddisfare a tutte queste condizioni inseparabili dal meccanismo del remare, s' adotta in pratica or una or altra proporzione, secondo i casi, tra le parti del remo entro e fuori del navilio. Non è dunque lecito il fissare a piacere la ragione $\frac{a}{b}$, o secondo i dettami della teoria, dovendo ella adattarsi alle circostanze sopraddette. E un altro oggetto finalmente bisogna appagare essenzialissimo, quello cioè di bilanciare il peso delle due parti *PV*, *VR*, sì che il centro di gravità del remo cada ne' contorni di *V*, affinchè nel maneggiarlo fuor d' acqua abbiasi la maggior possibile facilità il rematore, di che abbiamo parlato al §. XVII.

Non mi trattengo di più su questo argomento, avendolo messo, per quanto mi pare, nel suo vero lume, e avendo mostrato che non è da fondarsi molto su la proporzione migliore di quelle parti secondo i principj della teoria per indi dedurre il moto più o meno vantaggioso del navilio, non potendo la pratica adattarvisi per alcun conto, obbligata alle condizioni sopraespresse non soggette all' arbitrio del Geometra.

MEMORIA
SECONDA ED ULTIMA

Sopra la riproduzione della Testa nelle Lumache terrestri (*).

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore di Storia Naturale nell' Università di Pavia.

INTRODUZIONE.

NOn saprei dire se a giorni nostri siavi stato fenomeno naturale, che per la sua novità, e apparente stranezza fatto abbia tanto romore nel Mondo fisico, dato abbia origine a tante esperienze, e tutt' insieme a risultati sì diversi, sì contrarianti, come il riproducimento del capo nelle lumache terrestri. Dopo la pubblicazion del mio *Prodromo*, e le Traduzioni fatte di esso in lingua francese, tedesca, ed inglese, è incredibile quante migliaja di questi rettili vennero decollate, parte da alcuni che dando in seguito suora i lor Saggi su le lumache, hanno resi per la prima volta consapevoli i dotti di loro esistenza; parte da Fisici comunali, od anche di qualche celebrità, ma poco meno che inetti per le sperienze; e parte in fine da Fisici illustri, e che nell' arte dello sperimentare godono d' una stabilita riputazione. Una sì grande diversità di uomini sperimentatori come non doveva produrre una considerabile discrepanza nei risultati? Quindi egli è avvenuto di fatti, che alcuni ben lontano dall' ottenere la riproduzione del capo in questi testacei, ne hanno avuta la morte; e ciò ha fornita loro occasione di combat-

(*) La prima Memoria su lo stesso argomento è stampata nel Tomo I. della *Società* Italiana.

tere, e rigettare la mia ſcoperta, giudicandola più preſto immaginaria, che veritiera. Altri conſeguito avendo ſoltanto un principio di riproducimento, l' hanno accagionata per non verace del tutto, ma eſagerata anzi che no. Altri in fine con l' avere ottenuto l' intiero capo rigenerato, l' hanno confermata compiutamente.

Dopo l' avere io nella prima Memoria narrati i principali riſultati di mie eſperienze relativi al preſente ſoggetto, mi rimane in queſta ſeconda, a compimento del medeſimo, di narrare gli altrui, eſponendo con amica imparzialità così quelli che favoriſcono la mia cauſa, come gli altri che le ſono contrarj. Debbo qui ſolo avvertire, che tanto in prò, quanto in contro io non farò parola che di quelle eſperienze, che a mia notizia per le ſtampe ſi trovan già note, o che inedite ſono ſtate a me comunicate da Fiſici inſigni. Imperocchè quantunque ſu d'un tal punto v'abbiano altre eſperienze, e queſte non poche, e inſtituite anche in parte da uomini di non languida fama; pure io non le reputo degne di ſtoria, per non eſſere ſtate notate dai loro Autori, i quali soprappreſi dalla novità e ſtranezza del fatto, non hanno avuto altro in mira (bene o male) che di ripeterlo, nulla curandoſi poi di affidarne alla carta i riſultati, e molto meno di renderli pubblici. A procacciar poſcia al preſente ſcritto luce e buon ordine, fia bene il dividerlo in tre Articoli; il primo de' quali verſerà intorno a quegli eſperimenti che impugnano la mia ſcoperta; il ſecondo comprenderà quegli altri che la confermano; e il terzo abbraccerà diverſe Rifleſſioni, che ho creduto adattate a togliere gli equivocamenti, e a porre in maggior lume la verità.

ARTICOLO I.

Si riferiſcono le ſperienze contrarie.

Si può dire che l' *Avant-coureur*, Foglio ebdomadario che che ſi ſtampa in Parigi, ſia ſtato per un tempo il campo di battaglia, dove hanno combattuto più Autori così a favore che contra il rinnovamento del capo nelle decollate lumache. La prima oppoſizione che qui ſi trova è del Sig. *Wartel*,

sotto li 4 Luglio del 1768, esposta ne' seguenti termini.

„ Il Sig. *Wartel*, Canonico Regolare dell' Abbazia di S.
„ Eloi, e della *Società* Letteraria di Arras, ha osservato che
„ le lumache vivono lunghissimo tempo senza alcune di quel-
„ le parti, che sembrano essenziali alla vita. Sul finire di
„ Ottobre del 1767 ei recise il capo a molte lumache, che
„ si rinchiusero subito ne' loro gusci, e che ne otturaron la
„ bocca, come se state fossero intere, e con sorpresa le vide
„ nel mese di Maggio del 1768 uscire dalle loro case, pie-
„ ne di vita, ma senza testa. Il Sig. *Wartel* non crede pos-
„ sibile nelle lumache la riproduzione della testa, conciossia-
„ chè dopo le sue esperienze nessuna l' ha rifatta; anzi
„ non hanno rifatti tampoco i corni alcune di esse, alle
„ quali gli aveva recisi „.

Analogo a questo fatto si è l' altro del Padre *Cotte*, Prete dell' Oratorio, riferito dallo stesso Giornale li 29 Maggio del 1769, che per essere diffusamente esposto riporterò compendiato.

Udita che ebbe a Parigi quel Religioso la mia Osservazione, preso il destro di un' abbondante pioggia caduta in Giugno, fece con affilata forbice saltare in aria tante teste, quante lumache per la sopravvenuta pioggia erano uscite del guscio. Furono in seguito riposte in luogo, dove sovente egli potea visitarle. Spirati otto giorni, di 12 lumache ch' egli avea decapitate, quattro eran morte. Le altre periron dopo, fuori di una sola, che dopo un anno viveva ancora, ma senza la più picciola apparenza di riproduzione.

Gli 11. dello stesso mese il Padre *Cotte* decapitò altre 12 lumache, e si accorse che due o tre, a cui credeva di aver fatta a dovere l'operazione, mostravano ancora intere le corna, le quali soltanto spogliate apparivano della pelle, che le ricopre. Dal che conclude quel Religioso, che la lumaca ha qualche volta il tempo, nel momento che sente l'azion della forbice, di ritirare la testa in guisa, che non ne resta tagliato che l' invoglio, o la pelle che la ricopre. Ora egli è certo, soggiugne questo Naturalista, che le lumache possono riprodur questa pelle, e far credere di avere acquistata una nuova testa a un osservatore, che non sia a lume della loro astuzia. Ma per conto di quelle lumache, che non sono sì

pronte nel ritirare la teſta, egli è più che perſuaſo che, recisa loro che ſi abbia una volta, non la ricuperano più mai.

Queſte ſperienze furono ripetute dal Padre *Cotte* ſu di un numero prodigioſo di lumache ne' ſeguenti anni 1770. 1771. 1772. 1773, e i riſultati tornarono preſſo a poco gli ſteſſi come appariſce dal Giornale di Fiſica dell' Abbate *Rozier*, dove ſta regiſtrata queſta lunga ſerie di novelle eſperienze. Le lumache adunque per lui decapitate in progreſſo di tempo periron tutte, ſenza che alcuna riproduceſſe la teſta; che anzi ſe invece di mutilarle così, la ſorbice non veniva a levare che la pelle del capo, neppur queſta rigeneravaſi. Di più ſe invece del capo venivan loro levate le corna, neppur queſte, come oſſervò egli, ſi rifacevano.

Nell' anno ſteſſo 1769 che nel *Avant-coureur* fece imprimere le ſue prime eſperienze intorno alle lumache il Padre *Cotte*, nel Giornale di *Berna* li 4 Febbrajo pubblicò le ſue ſul medeſimo ſoggetto il Signore *Valmont* di Bomare, come coſta dalle ſeguenti parole.

„ Si ricorderà che il Dottore *Spallanzani* Naturaliſta di „ Modena nel meſe di Giugno dell' anno 1768 annunziò la „ ſcoperta della riproduzione della teſta nelle lumache. Il „ Sig. *Valmont* di Bomare, Oſtenſore di Storia Naturale, di „ cui ha dato fuori un Dizionario, ha ripetuto le ſue eſpe- „ rienze intorno a queſta materia l' autunno del 1768 a „ *Chantilly* in compagnia del Signor *Borie*, Speziale del Prin- „ cipe di *Condé*. Hanno oſſervato che le lumache, a cui bruſ- „ camente tagliato avevano la teſta, ſono morte, eſalando „ un odore fetidiſſimo. Di 52, che avevano decapitato, non „ ve ne ſono ſtate che 9, che eſſi veduto abbiano ſtriſciare „ in capo a 24 ore, ed erano unicamente quelle, che erano „ ſtate mutilate, appoggiando debilmente tra le corna e le „ parti della generazione il taglio di un coltello, male affi- „ lato. Veggonſi allora ſenſibilmente rientrar le corna nell' „ interno dell' animale, a cui non è ſtata tagliata che la „ pelle, e la maſcella ſuperiore. Quindi ricomparendo l' ani- „ male, fa vedere le corna mutilate „.

Preſſo a poco le ſteſſe coſe ridice queſto Franceſe nel ſuo Dizionario di Storia Naturale all' Articolo *Limaçon*, aggiungendo di aver ripetuto nel 1769 i medeſimi tentativi ſu

molte altre lumache, ma col medeſimo infelice ſucceſſo.

Da queſti tre Naturaliſti, che in virtù delle loro eſperienze negata hanno del tutto la riproduzione del capo nelle lumache, non denno andar diſgiunti due altri, cioè a dire li Sigg. *Argenville*, e *Schröter*. Sebbene per conto del primo, non avendo io potuto vedere il ſuo libro, malgrado le diligenze da me uſate per rinvenirlo, dovrò contentarmi di riferire quel poco che nelle ſeguenti parole ne accenna il Sig. *Murray* in una ſua Memoria relativa al preſente ſoggetto, della quale dovrò parlare più ſotto. *Maxime vero ab affirmantium parte recedit Argenville, ex centenis (cochleis) 25 modo in diem poſterum vixiſſe referens*. Per ciò poi che riſguarda il Naturaliſta Tedeſco, nel ſuo *Saggio d' un Trattato Siſtematico ſopra le Conchiglie terreſtri* (*a*) impiega egli quaſi un' intiera Sezione nel raccontare i numeroſi ſuoi cimenti ſu le lumache. E ſiccome tante morirono, quante furono quelle che decollò (e queſte giunſero a più centinaja), quindi ſi crede autorizzato abbaſtanza per negare in tai rettili la rinnovazion della teſta. Che anzi non avendo eſſi tampoco rifatte le corna reciſe, nè la coda, nega egli del pari la poſſibilità della rigenerazione di queſte parti.

Rimane ora a parlare di quegli Autori, i quali quantunque con le loro eſperienze non combattano in tutto le mie, in quanto che non negano eſſi qualunque riproducimento del capo, vogliono però che tal riproducimento non ſia mai dell' intiero capo, ma d'una parte ſoltanto, o appartenenza di eſſo. Tre a mia notizia ſono queſti, cioè il teſtè citato *Murray*, *Adanſon*, e *Preſciani*. E per rifarmi ſul primo, egli nell' accennata ſua Memoria (*b*) dopo l' avere eſpoſto con lungo apparato di erudizione gli eſperimenti di quelli, che confermata hanno la mia ſcoperta, e di quegli altri che l' hanno impugnata, diſcende in fine a darci conto de' ſuoi tentativi, che in tutto riduconſi a due. Aggiraſi il primo ſu quella ſpecie di lumaca detta *helix pomatia* da' Siſtematici. Due pertanto di queſte vennero da lui mutilate in guiſa, che la teſta fu

(*a*) Verſ. e. Syſtem. Abhandl. über d. Erdconchylien. Berl. 1771.

(*b*) *Joan. Andr. Murray* &c. de Redintegratione Partium Cochleis, Limacibuſque præciſarum differens &c. Gottingæ 1776.

ſpiccata dal collo dietro alla baſe delle corna poſteriori. Una di queſte dopo una ſettimana morì. Non così avvenne all' altra, la quale anzi riproduſſe: la riproduzione però conſiſtè in poco, cioè a dire in un corno anteriore, e queſto anche fatto a ſtento, e quaſi che diſſi a diſpetto della natura, sì perchè trovoſſi più breve, e più groſſo del conſueto, sì perchè la ſua ſommità non andava fornita di quel punto nero, tenuto comunemente per l' occhio della lumaca. Tale in iſcorcio è il primo tentativo, cui tien dietro il ſecondo, che è queſto. Preſe avendo il Sig. *Murray* dieci lumache d' altra ſpecie (*helix nemoralis*), alcune di queſte furono condannate a perder la teſta congiuntamente alle quattro corna; altre la porzione anteriore della teſta inſieme a due corna; altre la metà della teſta unitamente alle quattro corna. Taluna poi non fu privata che delle quattro corna, e tale altra che di due ſole. L' eſito che ne ebbe quel Naturaliſta fu il ſeguente. Dopo ſei ſettimane o in quel torno una delle mutilate nelle ſole corna ne moſtrò due di riprodotte, ſenza però che uno di cotali corna novelle corredato foſſe del ſuo occhio. Le altre lumache poi, cui era ſtata tolta tutta la teſta, o una porzione ſoltanto, ſi occultarono ne' loro guſci, e vi ſi profondaron per modo, che ad onta di qualunque ſtimolo non fu mai che voleſſero uſcirne. Il perchè annojato egli di aſpettare più oltre, ruppe il guſcio ad una, alla quale tagliato avea l' intiera teſta, e ſi accorſe che nella parte d' avanti erano gia ſpuntati due lunghi corpicciuoli ſimili ai rudimenti delle corna, ma inſenſibili. Ma fu conteſo all' Autore per una ſopraggiunta accidentalità il ſeguire più oltre le ſue oſſervazioni. Quindi dal vedere che queſti teſtacei non reſtaurano la teſta perduta, ma ſoltanto qualche ſua appartenenza, come ſono le corna, e queſte anche imperſettamente, non può egli convenire con me pienamente ſenza però diſcordare affatto; e quindi ſi dichiara di voler tenere una ſtrada di mezzo tra coloro che affermano il riproducimento del capo nelle lumache, e quei che lo negano.

Ai riſultati delle ſperienze del Profeſſor di Gottinga ſono alquanto analoghi quelli d' un certo Dottore *Preſciani* di Arezzo in Toſcana, compreſi in una Lettera inſerita nel Tomo XXXII. del Giornale di Piſa pubblicato nell' anno 1778.

Dopo adunque di aver egli esposto nella Lettera il dettaglio di sue esperienze, sul finire di essa ne raccoglie i corollarj espressi nei seguenti termini. " Quello adunque che credo d' a-
„ ver potuto risolvere, è che le mie lumache, alle quali ho
„ levato la testa con porzion del cervello, sono tutte morte
„ prima o dopo, secondo che loro è stata levata maggiore o mi-
„ nor porzione di cervello; che le altre alle quali ho levato
„ le antenne, i labbri, i denti, il palato, e la lingua senza
„ toccare il cervello, sono vivute per tutto quel tempo che
„ han potuto soffrire il digiuno, e che le altre poi, alle quali
„ ho tolto le sole antenne, con gl' integumenti del capo, ed
„ i labbri, hanno tutte perfettamente riprodotto „. Parliamo per ultimo del Sig. *Adanson*. Veramente non può dirsi che questi pubblicato abbia scritto alcuno particolare intorno a questo soggetto. Solamente da una sua Lettera sotto il giorno 30 di Luglio 1769 scritta al Sig. Carlo *Bonnet*, e da quest' ultimo stampata nelle sue Opere (*a*), si raccoglie ch' egli pure è stato nel numero degli Sperimentatori, e che anzi ha sacrificato al coltello anatomico più lumache, che qualunque altro Fisico, essendo giunto a decapitarne in un anno più di 1400. Comincia l' Accademico di Parigi la Lettera col farci sapere d' essere egli stato il primo a dubitare filosoficamente delle mie sperienze relative alla rigenerazione della testa, ed anche delle corna, e delle mascelle delle lumache. Poi scende a provare che il suo dubbio era sondato, giacchè in mezzo a tanta carnificina non ha ottenuto que' riproducimenti che si promettono dalle mie esperienze. Vero è ch' egli ha conseguito delle riproduzioni, ed anche subite, di corna, di teste, di labbri, ecc; ma queste erano riproduzioni di parti non interamente recise; conciossiachè tutte le teste, tutte le corna, tutte le mascelle ecc., che vennero da lui tagliate per intiero, non gli fecero mai vedere la più picciola riproduzione. Quindi dopo l' avermi ammonito d' essere più cauto nell' indagare la verità, si fa a dire ch' io da uomo inesperto mi sono ingannato; in quanto che ho creduto di

(*a*) Collection complette des Oeuvres de Charles *Bonnet* ecc. T. V. Part. I.

di tagliar la testa alle lumache, e non ho loro tagliato che il *berrettino* o la *calotta*, siccome si esprime il Sig. *Adanson*. Anzi le voci di *berrettino*, e *calotta*, soggiugne egli che sono l' usitata sua espressione, allorchè favella delle mie riproduzioni. Io ho dunque creduto, per lui avviso, di recidere o estirpare le corna o le mascelle, e vi restava sempre la radice, la quale non è punto a stupire se gittato abbia qualche rampollo. Termina poi l' Accademico Francese questa sua Lettera col fare un elogio a se stesso, encomiando la sua bravura nel far notomie de' minuti animali.

E questi sono i tentativi degl' Impugnatori della mia scoperta. Entriamo ora a parlare dei Difensori della medesima; il che formerà il soggetto del seguente Articolo.

ARTICOLO II.

Si riferiscono le Sperienze favorevoli.

Malgrado la moltiplicità delle surriferite esperienze io non mi trovava per nulla pentito di aver pubblicata nel *Prodromo* quella mia singolare osservazione su le lumache; e ciò perchè io era troppo sicuro di aver veduto quanto quivi racconto, senza timore che qualche ingannatrice apparenza mi avesse imposto. Fin nella primavera del 1766 io mi avvidi del rinnovamento del capo, e delle corna in questa fatta di rettili; ciò non pertanto io differj fino al 1768 a far palese al mondo dotto questo straordinario fenomeno; perchè appunto io non mi contentai per una sola volta di averlo ammirato; ma voleva vederlo di nuovo, e tornarlo a vedere, facendo nel tempo stesso i più minuti e i più diligenti anatomici esami, tanto nelle parti ch' io recidea, quanto in quelle che rigeneravansi, per accertarmi se dir potevasi a tutto rigore, che ciò che riprodotto appariva, era veramente il *capo* della lumaca. Attesa la corrispondenza letteraria, in cui fin d' allora io aveva l' onor di trovarmi, coll' illustre mio Amico Sig. *Bonnet*, io gli andava a mano a mano comunicando la serie tutta quanta de' fatti, che risguardavano i principj, i progressi, e il fine di queste riproduzioni, delle quali egli mostrossi persuasissimo, come apparisce da molte sue

lettere su tal proposito a me scritte, e che si trovano impresse fra le sue Opere (*a*). Ed in cotal persuasione sono pur rimasti tutti que' saggi Conoscitori, a' quali ho dato a vedere questi animali riproducenti, così in Modena, quando in quell' Università io era Professore, come qui in Pavia: e posso dire che anche l' anno 1782 trovandomi aver più lumache su gli ultimi di Giugno, che cominciavano assai bene a rifar le teste, che loro erano state mozzate in Maggio, ebbi la compiacenza di mostrarle a due miei rispettabili Colleghi, giudici ottimi di queste materie, il Sig. *Tissot*, e il Padre *Barletti*, i quali dopo di averle diligentemente, e per ogni parte esaminate, convennero meco senza punto esitare, che le parti che si vedevano rifabbricate, non erano già l' invoglio delle antiche teste, ossia il loro *berrettino* o *calotta*, siccome scherzevolmente ama chiamarle il Sig. *Adanson*, ma vere, verissime, arciverissime teste novelle. Anzi favorito avendomi il prelodato Sig. *Tissot* di recar seco a Ginevra ne' primi di Luglio dell' anno stesso alcune di queste riproducenti lumache, per farle avere a mio nome al Sig. *Bonnet*, questi con sua lettera dei 10 del susseguente Agosto così mi rispose. " Tutte le lumache, che consegnato avete per me al
„ Sig. *Tissot*, mi sono giunte in ottimo stato, ed ho veduto in esse le ammirabili riproduzioni assai più inoltrate che in quelle, su cui ho fatto io le mie esperienze. Le vostre sono d' una specie ch' io non conosceva: sembra avvicinarsi alcun poco alla grossa specie del nostro paese; ma ne differisce nei colori, e per l' inferiorità della statura. Apparentemente la riproduzione si fa meglio o più facilmente nella vostra specie che nelle nostre, o in quelle della Francia. Io ne giudico dai risultati nati dai differenti tentativi intrapresi di qua da' monti, e da' miei in particolare.
E dopo l' avermi ragionato d' altre cose, sul terminar della lettera soggiunge. " Rodendo la porta di carta della loro
„ prigione le vostre lumache mi hanno dato le migliori pruove che finito avevan del tutto di rifare la testa. Sarebbe forse ben che rodessero la punta del naso dell' incredulo

(*a*) L. c.

„ *Adanson*, a fine di persuaderlo di ciò che si ostina di non
„ voler credere „.

In virtù adunque, e per opera de' miei esperimenti io era conscio a me stesso di non essermi ingannato, che che mi opponesser gli Autori nell' antecedente Articolo per me citati. Aggiugnevasi che i loro tentativi erano negativi, e i miei per contrario erano positivi; e la Logica c' insegna che un fatto positivo non rimane distrutto da mille negativi, per essere innumerabili (e moltissime non prevedute) le circostanze che turbar ponno il riuscimento d'un fatto. Ad onta però di tutte queste ragioni, se a mio favore combattuto non avessero che le mie sole esperienze, io non poteva esserne appieno contento. Di questa verità fisica da me discoperta, oltre al Sig. *Bonnet*, erano restati interamente convinti que' pochi miei dotti Amici, che co' propri occhi l' avevan veduta, e ammirata; ma io aveva fondamento di dubitare che stato non fosse lo stesso del Pubblico illuminato; e ogni Autore che dà in luce qualche suo ritrovamento deve essere troppo premuroso di persuadere anche questo. Vo' adunque dire che que' lettori che dopo l' aver lette le mie sperienze, passavano a legger quelle de' miei Oppositori, si trovavano posti tra due autorità contrarie; e malgrado la qualche confidenza, che aver potessero su quanto in esse affermativamente io asseriva, questa però non bastava peravventura a dissipare dal loro animo ogni ombra di contrario sospetto, o dubbiezza, naturalmente creatasi in loro dall' inaudita stranezza del fatto, e confermatasi poi, e fors' anche accresciutasi da tanti altri fatti che tendevano ad impugnarlo. A far sì che ne rimanessero onninamente convinti non vi era miglior mezzo, che questa contrastata riproduzione venisse richiamata a rigoroso esame da valenti Fisici, e da essi accertata in modo, che più non restasse luogo ai contrasti. E tanto appunto è avvenuto. Ed oltre a quell' interna compiacenza che sente qualunque fisico Ricercatore nel trovar confermate le proprie esperienze, provo anche l' altra di vedere che i più di questi Naturalisti si sono compiaciuti di prender le mie parti, senza che tra me e loro vi avesse il più picciol rapporto, la più picciola letteraria corrispondenza. Stimo adunque troppo importante alla mia causa, che è pur quella della verità, il

recare in mezzo que' fatti, che la favoreggiano. E siccome veduto abbiamo che alcuni de' fatti opponentisi alle mie esperienze si leggono nel Giornal di Parigi, intitolato l'*Avant-coureur*, così quivi si trovano pur altri favorevoli ad esse, il primo de' quali si è questo.

,, Il Sig. *Roos* Tedesco, che attualmente dimora a Parigi,
,, ha intrapreso di avverare le sperienze del Sig. *Spallanzani*
,, sopra una certa quantità di lumache, a cui egli ha tagliata
,, la testa. Alcune sono morte, altre hanno sopravvissuto all'
,, operazione, e tra quest' ultime, quando le ha fatte vede-
,, re son già alcuni giorni a molti Fisici, e Naturalisti, ve
,, n' erano due che sembravano annunziare la riproduzione
,, della loro testa. Ad una si vedevano già le due corna su-
,, periori interamente riprodotte; e la seconda aveva acqui-
,, stata una nuova testa, in cui appariva la bocca, e le quat-
,, tro corna o antenne; ma secondo l' osservazione del Sig.
,, *Roos*, questa lumaca non aveva ancor mangiato dopo la
,, riproduzione ,, (N.° 30 di detto Giornale, 25 Luglio, 1768).

Al Numero poi 47 dello stesso anno si leggono queste pa-
,, role. " Il Sig. *Roos* ha continuato su le lumache le sue
,, esperienze, di cui abbiamo fatta menzione nel nostro Fo-
,, glio dei 25 Luglio scaduto. Egli ha di nuovo osservato
,, che una di quelle lumache, alla quale aveva tagliata la te-
,, sta alla radice delle corna, acquistato aveva una nuova te-
,, sta, e le quattro corna sono già comparse ,,.

Questi risultati consuonano con quelli del Sig. *Lavoisier*, riferiti essi pure dal citato Giornale, Num. 38. 19 Settembre 1768. " Nel nostro Foglio dei 30 Maggio di quest' anno pubblicata abbiamo la singolare scoperta dell' Ab. *Spallan-*
,, *zani* Professore in Modena, la quale scoperta concerne la
,, riproduzione del capo nelle lumache. Narrato abbiamo un
,, tal fenomeno con tutta quella circospezione che merita una
,, novità tanto sorprendente. Presentemente ne possiamo par-
,, lare con più confidenza. Il Sig. *Lavoisier* ha fatto vedere
,, all' Accademia Reale delle Scienze, della quale egli è
,, membro, una lumaca, a cui aveva tagliata la testa egli
,, stesso, e che ha custodita, ed osservata diligentissimamen-
,, te, la qual lumaca ha riprodotto una nuova testa, somi-

„ gliantiſſima alla prima, a riſerva di non avere ancora ac-
„ quiſtato il colore del rimanente del corpo, come trovavaſi
„ nella prima teſta „.

Non ha laſciato queſto Accademico di proſeguire le ſue ſperienze, come ſi raccoglie da' ſeguenti termini dello ſteſſo Giornale, Num. 44, 1768. " Quanto abbiam detto intorno
„ alla riproduzione, che faſſi nelle lumache, quando ſi è lo-
„ ro tagliata la teſta, ſembra eſſerſi procacciata l' attenzione
„ del pubblico, e dei dotti. Ci affrettiamo di comunicar lo-
„ ro intorno alle ſperienze fatte dal Sig. *Lavoiſier* delle de-
„ ſcrizioni più preciſe, più circoſtanziate, e più eſatte, ta-
„ li in una parola, quali le ha eſpoſte egli ſteſſo all' Acca-
„ demia Reale delle Scienze.

„ Le lumache, intorno a cui ſi è eſercitato il dotto Accade-
„ mico, hanno avuta la teſta tagliata un poco al di là del-
„ le quattro corna. Subito che è ſtato fatto il taglio della
„ teſta, o almeno d' una porzione di teſta, la lumaca ritiraſi
„ precipitoſamente nel guſcio. Se eſce per cangiar di luogo,
„ come accade ad alcune, non ſi diſpiega che in parte. L'e-
„ ſtremità, ove è ſtato fatto il taglio, reſta increſpata, e a
„ *culo di gallina*. Con queſt' arte viene l' animale ad impe-
„ dire lo ſpargimento degli umori. Alcuni giorni dopo for-
„ maſi una pelle fina e traſparente nel ſito del taglio, ma
„ non veggonſi comparire che dopo un meſe circa i primi
„ effetti della riproduzione.

„ Queſta manifeſtaſi a foggia di picciola papilla o tuberco-
„ lo, che ſi fa vedere al lato deſtro del taglio: poco dopo
„ ne compariſce un ſecondo al lato ſiniſtro; e queſte papille
„ o tubercoli non ſono che i primi elementi delle nuove cor-
„ na. Nel tempo ſteſſo l' eſtremità dell' eſofago ſi allunga,
„ ed eſce a poco a poco dal piano del taglio, prendendo la
„ figura di una teſta che creſce inſenſibilmente. Il tutto ſi
„ opera mediante uno ſviluppo lentiſſimo, ma fuor di ciò
„ aſſai ſomigliante a quello che ſi oſſerva, quando la lumaca
„ eſce del guſcio. Paſſano in circa tre e più meſi prima che la
„ nuova teſta acquiſtato abbia a un di preſſo il volume del-
„ la prima; da cui però molto differiſce in ciò che in vece
„ d' eſſer coperta di una pelle fatta a ſagrino, come il re-
„ ſtante del corpo, ella non ha che una pelle fina e traſpa-

„ rente , la quale lascia pur vedere una parte dell' interna
„ organizzazione . Le corna sono pure molto più corte , e
„ più grosse che nello stato naturale ; non hanno che una li-
„ nea e mezzo di lunghezza : hanno però quella sensibilità
„ che sogliono avere nell' animale , e ad ogni leggier tocco
„ si ritirano „.

„ Ecco lo stato attuale di una delle lumache del Sig. *La-*
„ *voisier*, la quale ha fatto maggior progresso. E' stata mu-
„ tilata li 26 del passato Giugno. Egli ne conserva altre muti-
„ late nello stesso tempo, che non sono sì inoltrate nella ri-
„ produzione , circa le quali egli ha osservato che la testa
„ non è la sola parte suscettibile di riproduzione nella luma-
„ ca. Quella parte, che comunemente chiamasi *coda*, si ripro-
„ duce altresì , e a un di presso con le medesime circostan-
„ ze „.

Ma infra gli Accademici di Parigi il Sig. *Lavoisier* non è stato il solo , che veduto abbia cotal riproducimento : ve n' ha tre altri , come si fa palese dal Tomo degli Atti di questa Reale Accademia dell' anno 1768. Lo squarcio relativo a un tal fenomeno è troppo interessante per meritare d' esser riferito qui per intiero.

„ Il Sig. di *Reaumur* aveva sorpreso tutto il mondo fisico
„ per la portentosa riproduzione dei polipi , e di alcuni al-
„ tri animali. Ma ecco un nuovo fatto della medesima spe-
„ cie e forse più singolare , di cui il Sig. de la *Condamine*
„ ha fatto parte all' Accademia . Il Sig. *Spallanzani* divisato
„ avendo di tagliar le corna, ed anche la testa ad alcune lu-
„ mache, si avvide con sorpresa che alcuni di questi anima-
„ li, che credeva morti, non lo erano, e che dopo un tem-
„ po assai lungo alcuni avevano rifatte le corna , e alcuni
„ altri l' intiera testa.

„ Questo fatto eccitò la curiosità di molti Accademici , e
„ costò la testa a un gran numero di lumache . Ecco quan-
„ to noi abbiamo potuto raccogliere dalle osservazioni fatte ,
„ e comunicate all' Accademia da' Sigg. Cavaliere *Turgot*, *Te-*
„ *non*, *Herissant* , e da altri Fisici. A qualche lumaca è sta-
„ ta recisa interamente la testa. Alcune altre hanno avuta la
„ testa spaccata longitudinalmente , e ne è stata levata una
„ metà. Ad altre in fine non si è fatto che recidere, od an-

„ che ſtrappar le corna. Si è formata nel taglio una pelle
„ nuova, facilissima a diſtinguerſi dalla vecchia, la quale è
„ aſſai più oſcura nel colore: la pelle nuova non acquiſta ſe
„ non ſe dopo l' intiera riproduzione della parte quell' aria
„ di ſagrino, che ſembra avere la pelle della lumaca. Quel-
„ le lumache, a cui la teſta è ſtata interamente tagliata, ſi ri-
„ tirano dentro a' loro guſci, e vi reſtano chiuſe per un da-
„ to tempo, cioè a dire trenta o quaranta giorni.....

„ Dopo un meſe circa ſi vede formarſi nel mezzo della parte
„ reciſa una ſpecie di protuberanza, che creſce a poco a po-
„ co, e diventa in fine una teſta novella fornita della ſua
„ bocca, e de' ſuoi denti. Il Sig. *Heriſſant* ha dimoſtrato che
„ queſti denti erano una nuova riproduzione, avendo fatto
„ vedere la teſta tagliata d' una lumaca che conſervato ave-
„ va nello ſpirito di vino, alla qual teſta erano attaccati i
„ denti, quantunque la nuova teſta della medeſima lumaca
„ foſſe già provveduta de' ſuoi denti.

„ Le corna non ſi rigenerano ſe non ſe quando le teſte ſono
„ interamente formate. Queſte corna non oſſervano alcuna
„ regola nella loro riproduzione: e lo ſteſſo è di quelle che
„ ſono ſtate reciſe o ſtrappate. Generalmente ſono dapprinci-
„ pio d' un colore più chiaro che il rimanente del corpo, e
„ ſi forma alla loro eſtremità quel punto nero che credeſi eſ-
„ ſer l' occhio dell' animale. Tali ſono le ſingolari oſſerva-
„ zioni, che ci preſenta l' amputazione della teſta delle lu-
„ mache. Queſto ſi è un nuovo miracolo di Storia naturale,
„ e un' ampia materia offerta alle ricerche de' Fiſici „.

E queſte ſono quelle eſperienze, a mia notizia, ſtampate in Parigi, che da diverſi Naturaliſti Franceſi (ſe ſi eccettua il Sig. *Roos*) ſono ſtate inſtituite per verificare le mie. Segue ora a ragionare di quelle, che altri Naturaliſti d' altre parti d' Europa hanno intrapreſe ſul medeſimo ſoggetto; intorno alle quali volendo io ſerbare quell' ordine cronologico che ho proccurato di tenere quanto ho potuto in queſta Memoria nel raccontare i fatti tanto a me favorevoli, che contrarj, primamente è da dire d' uno ſcritto del Sig. *Müller* di Coppenague, impreſſo nell' anno 1769, e da lui riſtampato nel Volume ſecondo della ſua Opera intitolata: *Vermium terreſtrium, et fluviatilium ſuccincta Hiſtoria*. Sicome poi que-

ſto ſcritto non è tanto breve, così non ne darò io qui che un compendio col toccare i riſultati ſoltanto di ſue eſperienze dopo l' aver riferiti alcuni avvertimenti, e cautele, ch' egli ad eſſe premette, e che ſtimo pur neceſſario che non ignorino i lettori.

1. L'operazione in ciaſcun ſaggio fu ſempre fatta da queſto Naturaliſta Tedeſco col mezzo di due affilate forbici, allorchè la lumaca aveva allungate, e ſteſe quanto più poteva le corna, e la teſta: e preſe guardia quanto gli fu poſſibile di non recidere la parte ſottoſtante alla teſta, chiamata volgarmente il piede della lumaca.

2. Immediatamente appreſſo l' amputazione eſaminò egli coſtantemente con l' occhio non ſolo nudo, ma anche veſtito di lente la teſta levata, e vi vide, e vi fece vedere a dei Conoſcitori non ſolamente le quattro corna, ma gli occhi in cima alle maggiori, la bocca, i labbri, le maſcelle.

3. Quantunque poſſa accadere che in vece di levare la teſta, non ſi levi che la pelle, e una porzione di corna, atteſa la celerità della lumaca nel ritirare queſte parti, tuttavia non v' è pericolo d' ingannarſi. L' eſatto Oſſervatore eſaminando la parte tagliata che rimane ſul piano delle ſorbici, giudica ſul momento ſe l' operazione è ſtata ben fatta, o no: e il meno attento ſe ne può convincere toſto che la lumaca mutilata eſce del guſcio, poichè reſtando a lei attaccata la più picciola parte delle corna, non laſcierà di farla vedere tutte le volte che vien fuora del nicchio.

4. Le parti riprodotte ſi diſtinguono chiaramente mediante la loro bianchezza, e traſparenza da quelle che appartenevano alla lumaca, mantenendo queſt' ultime, benchè ſtaccate dall' animale, la loro opacità, e oſcuro colore.

5. Molte circoſtanze, evitabili e inevitabili, poſſono impedire la riproduzione delle parti tagliate: una ſola oſſervazione fatta con tutta la preciſione, ed eſattezza baſta a provare tal riproduzione ſenza replica.

Queſti ſono quegli avviſi preliminari, che a fine di andar contro a qualunque ſoſpetto o diffidenza intorno al modo da lui tenuto nell' operare ſi mettono innanzi dal Sig. *Müller* alle ſue Oſſervazioni, la ſomma delle quali è la ſeguente.

La

La lumaca *pomatia* fu da lui trovata inetta per la riproduzione, e lo steſſo avvenne alla *nemoralis*.

Non così fu d' un' altra lumaca che non era che una varietà di queſt' ultima. Li 19 Luglio 1768 fu a queſta in un ſol colpo troncata tutta quanta la teſta con porzione del collo, e la parte anteriore del piede. La riproduzione fu lenta ad averſi, ma ſi ottenne aſſai bene. Li 16 Settembre ſi vedeva già rifatta la parte anteriore del piede; ma non era così del capo, il quale ſoltanto nella primavera del 1769 cominciò ad apparire, e nel decorſo della buona ſtagione ſi ſviluppò pienamente, a riſerva però d'eſſer mancante della bocca, delle labbra, e delle corna minori.

Per l' oppoſito in altra lumaca decollata li 14 Settembre del 1768 il labbro ſuperiore li 29 Marzo del ſeguente anno era già formato, e l' apertura della bocca ſi rendeva viſibile.

Una terza lumaca decapitata altresì li 14 Settembre dello ſteſſo anno, nella ſtate del venturo avea già riſatta in maſſima parte la teſta.

Termina la ſua Memoria il Sig. *Müller* col dire che un viaggio intrapreſo non gli permiſe l'eſaminare più oltre queſte teſte riproducentiſi, ma che le ſue oſſervazioni gli ſembravano però baſtantiſſime a moſtrare indubitata la reſtituzione delle parti perdute nelle lumache.

Nello ſteſſo anno 1769 il Padre Scarella di Breſcia, Cherico Regolare, volle ripetere le mie eſperienze, i riſultati delle quali ſavorì di comunicarmi con la ſeguente ſua lettera de' 28 Settembre del medeſimo anno.

„ Dopo quattro meſi di ſilenzio finalmente vengo a rag-
„ guagliarla di quanto ho potuto oſſervare ne' miei tentati-
„ vi ſu le lumache, e in quelli di un mio Amico, verſatiſ-
„ ſimo nelle ſezioni anatomiche, Medico di profeſſione, il
„ Sig. Lodovico *Puſini*, che ſpero darà col tempo alla luce
„ le ſue ſcoperte nell' Anatomia, e nella Fiſiologia. Il dì
„ adunque 27 di Aprile alla preſenza di molti Profeſſori di
„ Medicina e di Fiſica tagliai la teſta a ſettanta due luma-
„ che raccolte negli orti, non poco al di là delle cor-
„ na maggiori, con forbici nuove, e aſſai taglienti, le qua-
„ li con un colpo ſolo e preſtamente recidevano dette teſte,

„ nè davano tempo alle lumache di ritirarle al di dentro, e
„ tutto ciò a fine di preoccupare alcune obbiezioni che ho
„ letto ne' Giornali di Parigi. Fino a quest' ultimo mese le
„ ho lasciate quiete in una cassetta esposta all' aria di una
„ finestra di camera chiusa per non disturbarle, e solamen-
„ te di quando in quando andava levando, e gettando via
„ quelle che al cattivo odore davano segni di morte. Sola-
„ mente dopo i dieci di Settembre fino a questi ultimi gior-
„ ni, insieme col detto Signore, e con altri ho esaminate
„ quelle che mi erano restate, e ne ho trovate ventidue an-
„ cor vive, le quali punte al di dietro mettevano fuori la
„ testa riprodotta, o la parte pur riprodotta, che alla mag-
„ gior tenerezza, e al color più bianchiccio del resto del
„ corpo, chiaramente si conosceva di novella riproduzione
„ anche da quelli che erano stati presenti al taglio delle me-
„ desime. Una di queste al solito stimolata, che chiamerò la
„ prima, gettò fuori la sua testa intiera e ben formata col-
„ le sue quattro corna simili a quelle che hanno le lumache
„ non tagliate, salvo il colore, e la mollezza, come ho no-
„ tato in generale. La seconda le sole due corna maggiori,
„ molto belle e lunghe, ma per quanto si stimolasse, nel luo-
„ go delle corna piccole non si potevano vedere che due pun-
„ te, che incominciavano a spuntare. La terza avea ripro-
„ dotta parte della testa, e moveali, ma non si vedeano che
„ i principj delle corna maggiori. La quarta gettò fuora le
„ corna maggiori, grosse al solito, ma corte. La quinta man-
„ dò fuori una parte della testa, e incominciava a gettare
„ le corna maggiori. La sesta due bianchiccie protuberanze,
„ che erano il principio delle corna maggiori. Nella settima
„ e nell' ottava osservai lo stesso, se non che nella settima
„ scorgevansi anche i principj delle corna minori. Nell' altre
„ quattordeci chiaramente notavasi il moto vitale, e una par-
„ te di testa riprodotta, più bianchiccia del resto del corpo,
„ senza alcun segno visibile di principio delle corna. Il più
„ volte nominato Sig. *Pusini* avendo tagliate più lumache,
„ me ne ha fatto vedere una colla testa interamente forma-
„ ta di nuovo, fornita delle quattro corna parimente di nuo-
„ vo prodotte, come a chiare note lo comprovavano e la
„ maggior mollezza, e il più bianchiccio colore, che nel vec-
„ chio corpo della lumaca.

„ Questo è quanto posso notificarle in testimonio di quella
„ stima ecc.

Brescia 28 Settembre 1769.

Suo Umiliss. e Devotiss. servitore
GIAMBATTISTA SCARELLA C. R.

L' anno appresso che mi furono gentilmente comunicate da questo Padre le sue Osservazioni, intesi dall' illustre mio Amico Sig. *Bonnet*, che il Sig. *Schaeffer* di Ratisbona aveva poco prima pubblicato un suo scritto di esperienze, che mirabilmente consermava le mie. Il perchè mosso io dal desiderio di aver lumi ulteriori, venni in pensiero di scriverne all' Autore istesso da cui ebbi obbligantemente questa risposta.
„Così è appunto, o Signore. Le mie sperienze, e osserva-
„ zioni intorno alle lumache hanno verificato pienamente le
„ vostre. Fors' anche io ho spinta alcun poco più in là di
„ voi la mia curiosità. M' incresce l' avere scritto le mie
„ esili dissertazioni in tedesco, e di non avere il tempo per
„ potervene fare un compendio in latino, o in francese. Co-
„ me posso, io supplisco a questa mancanza coll' unire alla
„ lettera un picciolo estratto composto da un Amico, e so-
„ no intanto ecc.

Ratisbona li 8 Marzo 1770.

Vostro Umiliss. Obbligatiss. servo
GIACOMO SCHAEFFER.

Estratto relativo alla Riproduzione delle Lumache.

„Sono state fatte da poco tempo in qua alcune osserva-
„ zioni di storia naturale molto singolari intorno alle lu-
„ mache.
„Nel 1753 il Sig. *Ziegenbalg*, dotto Danese, presentò
„ all' Accademia di Coppenague una Memoria in cui fece
„ conoscere che alcune lumache, alle quali aveva tagliata la
„ testa, erano restate vive, ed avevano anche continuato ad

„ uſcire del guſcio, e ad entrarvi ſecondo il coſtume. Quan-
„ tunque ſimil fenomeno doveſſe apparire ſtraordinario, non
„ ſi è però ſaputo che ſe gli abbia data tutta l'attenzione
„ che meritava. Non è che nel meſe di Marzo del 1768
„ che il Padre *Boſcovich* annunziò al Sig. de la *Condamine*,
„ che l' Abbate *Spallanzani*, Profeſſore di Filoſofia in Mo-
„ dena, avendo tagliata la teſta a diverſe lumache terreſtri,
„ non ſolamente queſti animali non erano morti, ma che
„ dopo l' eſſerſi per qualche tempo ritirati ne' loro guſci,
„ ne erano in ſeguito uſciti, come naturalmente ſogliono
„ fare, e che finalmente riſabbricata avevano una teſta no-
„ vella, organizzata come la prima.

„Una oſſervazione di queſta natura non poteva che eccita-
„ re la curioſità de' Naturaliſti. E però non è a maraviglia-
„ re ſe è ſtata ſubito ripetuta, così in Francia, che in Ger-
„ mania. Il ſucceſſo ne è ſtato coſtantemente il medeſimo. Ma
„ ſopra tutto il celebre Sig. *Schaeffer* di Ratisbona è ſtato
„ quegli che ha meſſo cotal fenomeno fuori di qualunque in-
„ certezza. Queſto grande Naturaliſta reiterate avendo più
„ volte queſte eſperienze ſu le lumache, ha veduto coſtante-
„ mente rinaſcere non ſolamente le teſte, ma le code ezian-
„ dio che loro aveva tagliate. Ha pubblicato le ſue eſpe-
„ rienze l' anno ſcorſo in un Trattato ornato di figure mi-
„ niate.

„ Abbiamo di nuovo ripetute queſte eſperienze li 9 Mag-
„ gio dell' anno paſſato, avendo noi a tal fine reciſe le te-
„ ſte a venti ſei lumache. Due ſole ſono morte dopo il ta-
„ glio. Le altre ſono viſſute tutte, ed hanno riprodotte le
„ teſte „.

Nell' anno 1769 il Sig. Ab. *Troilo*, attuale Bibliotecario di S. A. S. il Sig. Duca di Modena, e Profeſſore emerito di Fiſica Sperimentale in quella Univerſità, ſi eſercitò egli pure ſu lo ſteſſo ſoggetto, e nel 1770 ſi compiacque ragguagliarmi dell' eſito con ſua umaniſſima lettera de' 28 Aprile dello ſteſſo anno; la qual lettera per eſſere alquanto lunga riferirò in compendio.

Le lumache al numero di 124, e della ſpecie nomata *nemoralis*, furono mutilate li 5 di Maggio. A 68 venne con tagliente forbice troncata ad un colpo tutta la teſta, con di

più una porzione del collo. A 28 tutta la testa precisamente. E ad altre 28 la metà quasi della medesima, cioè a dire quella porzione che abbraccia le due corna minori, le labbra, le due mandibole col proprio dente, e i diversi muscoli che accompagnano cotesti organi.

Parliamo primieramente delle prime. Li 29 del suddetto mese ne eran già perite 49: una però cominciava a ricuperare una sensibil porzione di testa: alcune altre rifatto avevano il sinistro corno maggiore, e il restante di esse, fuor d'una sola, manifestava un principio di riproducimento. Tutte queste rigenerazioni però nell'entrante Giugno fecero pochissimi progressi, malgrado l'accresciuto calore dell'atmosfera, che sappiamo quanto influisca su le riproduzioni: e intanto lasciavan di vivere altre lumache, così che li 14 dello stesso mese, delle lumache 68, cui oltre il capo era stato levato un pezzo di collo, nessuna restava più in vita.

L'affare fu ben diverso nelle 28 lumache, cui era stata per intiero tronca la testa, senza però intaccare altre parti. Li 29 di Maggio, cioè 24 giorni dopo la decapitazione, non ne era perita che una, e intanto da quasi tutte pullulavano più o meno le nascenti corna, ovvero un principio di testa. Nell' entrante Giugno queste parti erano considerabilmente cresciute, e la prova decisiva che la testa in alcune, che per la rigenerazione si erano portate meglio dell' altre, erasi già compiuta, fu che si cibarono di latuca che venne loro somministrata.

A quel modo che si ebbero le riproduzioni dell' intiera testa, era ben credibile che molto più facilmente si sarebbero ottenute l' altre della testa dimezzata. Così appunto ci fa sapere il nominato Sig. Abbate, che termina la sua lettera con l' avvertire due cose, l' una che malgrado la facilità, e la prontezza delle sue lumache nel riprodurre, ve ne furono però alcune che nei primi giorni di Settembre non avevano riacquistata interamente la testa; l' altra che in mezzo a più mostrosità che accompagnavano diverse riproduzioni ve n' era una bizzarrissima, consistente in due corna, l' un maggiore, l' altro minore, situate al lato destro del capo d' una lumaca, le quali essendo sempre cresciute unite, e come insieme

incollate, venivano a formare un ſol corno più groſſo, e men lungo di un corno naturale maggiore.

Diverſi anni dopo queſte ultime eſperienze, e quando meno io l' avrei penſato, vennero a luce tre ſcritti novelli, confermatori delle mie oſſervazioni, due del Sig. *Bonnet*, e un terzo del Sig. *Senebier*, Bibliotecario della Repubblica di Ginevra. I precipui motivi, che induſſero queſti due Naturaliſti a ſperimentare eſſi pure le lumache, furono i dubbj ſparſi contro di eſſe da' Signori *Adanſon*, e *Murray*. Trovato avendo pertanto che queſti dubbj erano mal fondati, pubblicarono per amore del vero le loro eſperienze, il Sig. *Senebier* in una lettera, che è inſerita nel Giornale di Fiſica dell' Ab. *Rozier*, la qual lettera per eſſere aſſai breve, traſcriverò per intiero; e il Sig. *Bonnet* in due Memorie, da lui ſtampate nella recente edizione di tutte le ſue Opere, delle quali Memorie baſterà pel mio ſcopo, e per iſtruzione di quelli che non le hanno vedute, il recar qui un ſuccinto ragguaglio.

Lettera del Sig. Senebier Bibliotecario della Repubblica di Ginevra, Membro di varie Accademie Scientifiche ecc. *all' Editore del Giornale di Fiſica, ſtampata nel Foglio del meſe di Agoſto per l' anno* 1777.

Mi prevalgo di queſta occaſione per annunziarvi che ho „ ripetuto la ſingolare oſſervazione del celebre Ab. *Spallanzani* ſu la riproduzione delle teſte che ſi tagliano alle lu- „ mache de' giardini. Io mi ci ſono impegnato dalla lettura „ della Gazzetta di Gottinga, dove ho veduto l' eſtratto d' una „ Memoria del Profeſſore *Murray*, la quale meſſe in dubbio la „ verità di queſte oſſervazioni; e perchè d' altronde io ſo eſſer- „ vi in Francia, e in altre parti diverſi non ignobili Oſſer- „ vatori, che riguardate le hanno come chimere. Io vi ſcri- „ vo queſto al preſente, perchè la ſtagione è favorevole a ſi- „ mili riproduzioni; ed opportuna a ripetere queſto genere di „ oſſervazioni.

„ Nel giorno 15 di Aprile di queſt' anno tagliai la teſta a „ 12 lumache di giardino. Mi aſſicurai che l' amputazione „ era ſtata ben fatta, notomizzato avendo la teſta tagliata „ ſotto la lente, e il microſcopio, e confrontando ciò ch' io

„ vedeva con l' esattissima descrizione che ne dà lo *Swam-*
„ *merdamio*. Ho potuto altresì accertarmene su gli stessi a-
„ nimali mutilati, spesse volte da me veduti strisciarsi sopra
„ le interne pareti de' vasi di cristallo dove si trovavano rin-
„ chiusi. In capo a tre settimane una di queste lumache
„ mostrò la testa, e le maggiori corna riprodotte; vidi spun-
„ tare altresì le due corna minori, e presentemente questa
„ lumaca è ritornata così perfetta, come lo era prima della
„ decapitazione: mangia come l' altre; e l' ho veduta accop-
„ piarsi con altro individuo della stessa specie, che le ho da-
„ to a compagno.

„ Le altre undici mi fanno vedere diverse varietà, e tra
„ queste undici non avvene alcuna che mostri una compiuta
„ riproduzione; ve n' è una altresì che ne dà appena un leg-
„ giere indizio; altre non hanno che un corno riprodotto
„ alla naturale sua lunghezza, o qualche altra parte ridotta
„ a perfezione, ma l' altre parti si vanno perfezionando in
„ alcuni altri individui.

„ Ve n' è uno, di cui tutte le parti che cadono sotto i
„ sensi, si riproducono nel tempo stesso, e in proporzione fra
„ loro. Niuna di queste lumache è ancor perita „.

Ginevra 15. Giugno 1777.

Passiamo ora a dare un trasunto delle due Memorie del Sig. *Bonnet*. Si aggira la prima, e buona parte della seconda su quella specie di lumache da lui chiamata di *grandezza mezzana*, che trovasi facilmente ne' giorni piovosi dentro a' giardini, il guscio della quale in alcuni individui pende al giallo, e in altri si vede ornato di fascie circolari, quando nere, e quando brune. Perchè l' amputazione fosse fatta a dovere il Fisico Ginevrino usò le maggiori cautele. Diede tempo alla lumaca di allungarsi quanto più le era possibile. Presentò più volte il tagliente coltello alle radici della testa prima di dare il colpo; e non credette l' operazione ben fatta, se non se quando già spiccata dal collo ebbe su la sua tavoletta la testa interissima.

Il primo saggio venne dal Sig. *Bonnet* intrapreso li 8 Maggio 1777 sopra dodeci lumache, mutilate ciascheduna nel

modo indicato, cioè a dire per l' intiera testa, rigettato avendo l' altre tutte che non erano state perfettamente decapitate: e nel tempo che scrivea questo tratto della sua Memoria (che era li 15 Luglio dello stesso anno 1777) dice ch' ei si trovava aver tuttavia su la tavoletta le dodeci teste separate da' loro tronchi. E discende l' oculatissimo Ginevrino Sperimentatore a tal circostanza, troppo premendogli di andar contro a qualunque contrario dubbio, a qualunque cavillo.

Li 23 Giugno due lumache rifatta avevano in parte la testa, ma in una terza si vedea già interamente compiuta. L' importanza del fatto esige ch' io lo descriva con le parole istesse dell' Autore. „ Le quattro corna in questa lumaca erano „ perfettamente compite, ed acquistata avevano tutta la gran„ dezza che è propria delle corna di questa specie. La boc„ ca sembrava ella pure benissimo rifatta; la sua apertura ve„ niva ad essere ben terminata, e le nuove labbra che non „ potevano essere più distinte, avevano la forma, e le pro„ porzioni, che dovevano avere. In somma questa lumaca era „ sì perfettamente simile all' altre lumache della sua specie, „ che non sono state mutilate, che io non poteva distinguerla, „ che per la diminuzione della sua statura, e per la sua „ trasparenza „.

L' altre lumache riprodussero esse pure più o meno, e di 12 che erano state decapitate una sola li 27 Luglio era perita.

Li 12 Maggio del medesimo anno il Sig. *Bonnet* aveva pure decollato 30 altre lumache della medesima specie, e l' operazione era stata fatta in queste come nelle prime, cioè a dire con l' amputazione dell' intera testa, e con le stesse avvertenze, e cautele. Ma qui ne perirono più di due terzi. Quelle però, che sopravvissero al taglio, rigenerarono le parti perdute con più o meno lentezza, e presentarono all' osservatore varie mostrosità, che avea pur vedute in alcune delle dodeci lumache da lui mutilate li 8 Maggio, le quali mostrosità essendo analoghe alle vedute da me, ed indicate nel *Prodromo*, e nella prima Memoria, non ho creduto necessario di doverle qui riferire.

E qui termina l' Autore il racconto de' suoi tentativi de-

scritti

scritti nella prima Memoria, con queste notabili parole. " Pre-
,, sentemente non procederò più oltre ne' dettagli di mie es-
,, perienze intorno alla rigenerazione delle lumache. Io mi
,, propongo di parlarne di nuovo in altra Memoria. Sembra-
,, mi frattanto di averne detto più che a sufficienza per pro-
,, vare che nulla vi è di più certo di questa maravigliosa ri-
,, generazione ,,.

Rimane ora a toccare i risultati dei tentativi della seconda Memoria, intrapresi dal Sig. *Bonnet* nel 1778 e 1780. Questi risultati però in generale sono, che le lumache decapitate in que' due anni non lasciarono esse pure di riprodurre, e le riproduzioni vennero accompagnate da quelle anomalie, e mostrosità che da lui erano state osservate l' anno 1777. Ma qui è necessario di più l' avvertire una particolarità. I tentativi della prima, e seconda Memoria fin qui accennati, si riferiscono tutti alla medesima specie di lumaca, cioè a quella che l' Autor chiama di *mezzana grandezza*. A render più compiute le sue esperienze stimò egli che convenisse il fare eziandio qualche saggio su l'altra qualità di lumaca, detta *helix pomatia*, che è delle più grosse che si trovano ne' contorni di Ginevra; essendo anche stato consigliato a far ciò dal Sig. *Adanson*, che gli scriveva che questa lumaca a preferenza di qualunque altra lo doveva pienamente convincere, siccome aveva convinto lui stesso, essere la decantata riproduzione del capo una pura pretta menzogna (*a*). A dodici di queste lumache venne adunque dal Sig. *Bonnet* recisa l' intera testa li 24 Maggio 1780. Dopo alcune settimane eran perite a metà. Li 30 Agosto la piaga nelle sei lumache che ancor vivevano si era perfettamente rammarginata, senza però che apparisse ancora verun principio di testa rinnovata. Verso la metà di Ottobre non ne rimanevano più di vive che quattro, le quali però furono bastanti a far vedere, che anche in questa specie il rifacimento del-

(*a*) La Lettera del Sig. *Adanson* è stampata nel principio della seconda Memoria del Sig. *Bonnet su la Rigenerazione della testa della lumaca*, della qual Lettera dovrò parlare nell' Articolo III.

la teſta non è un ſogno o una viſione, ma un fatto reale. Tutte quattro adunque diedero a quel tempo le più indubitate pruove di una verace riproduzione, anzi d'una riproduzione molto inoltrata. Non m' eſtendo a particolarizzarne col noſtro Autore le circoſtanze, per eſſere troppo ſimili a quanto è ſtato detto di ſopra ſul riparamento del capo nell' altra ſpecie di lumaca di mezzana grandezza.

Ed eccoci al fine della narrazione dei riſultati, in virtù de' quali i Signori *Roos*, *Lavoiſier*, *Turgot*, *Tenon*, *Heriſſant*, *Müller*, *Scarella*, *Schaeffer*, *Troilo*, *Senebier*, e *Bonnet* hanno confermata la mia ſcoperta. Ma tale ſcoperta acquiſterà, come ſpero, viemmaggiormente la confidenza dei dotti, coll' arricchirla di tre ſcritti inediti, pubblicando i quali ſon certo di far coſa grata ai lettori, per eſſer parto di tre valoroſi Italiani, pubblici Profeſſori di Notomia, e celebri già per più intereſſanti Opere da lor date in luce. E queſti ſono i Signori *Caldani*, *Girardi*, e *Pratolongo* giuniore, i quali in queſti ultimi anni eſſendo ſtati da me pregati a ſperimentare ſu i noſtri rettili, e a ſcrivermene con filoſofica libertà quanto in ſeguito intorno ad eſſi oſſervato aveſſero, ſi ſono gentilmente compiaciuti di condiſcendere alle mie iſtanze, mediante tre Lettere, che qui traſcrivo con quell' ordine di tempo, col quale giunte mi ſono.

Amico Pregiatiſſimo.

Eccomi finalmente a ſoddisfare le premure voſtre, epilogando in queſta mia i ſucceſſi delle oſſervazioni, che mi comandaſte ſino dall' anno ſcorſo, intorno alla facoltà che hanno le lumache di riprodurre la teſta, quando fu loro tagliata. Credo che la ſpoſizione dei fatti poſſa baſtarvi: il diario delle oſſervazioni è ſoverchiamente lungo, ed è ſcritto sì male, che durereſte non poca fatica a leggerlo, nè adeſſo io avrei tempo di farne una copia un po' diligente.

Diedi principio alle mie oſſervazioni il dì otto dello ſcorſo Luglio, ſervendomi di quelle lumache, le quali noi qui chiamiamo comunemente di orto, o di giardino: che hanno la buccia, o caſſa anzi oſcura di colore, che no, e di figura, la quale alla sferica molto ſi accoſta.

A diecisette di queste, alcune delle quali erano alquanto grandi, ed altre piccole, ho troncato il capo dietro le corna maggiori, e ciò con le seguenti cautele.

Mi proccurai una tavoletta di legno duro, più piana, che fosse possibile, su della quale le collocai. Posta questa tavoletta al Sole, aspettai che sortissero dal guscio, e che camminando strisciassero la testa ed il corpo tutto allungato sulla tavoletta medesima. Quando ciò accadeva, con un rasoio ben affilato, ma però di filo robusto, e non pieghevole, troncai loro il capo in un sol colpo, e nel luogo indicato, proccurando che il taglio del rasoio fosse perpendicolare al piano della tavoletta. Si ritirarono tostamente esse nella buccia, gettando dal troncone una materia viscida, e schiumosa, che in molte era di colore verdastro. Appresso le posi in un vaso, entro cui eravi della terra d'orto, e le coprii con un vaglio.

Passai dopo di ciò ad anatomizzare le teste tagliate appresso di averle conservate per poco nell'acqua tiepida, e ciò perchè si gonfiassero un pocolino, atteso che si erano queste teste contratte sensibilmente. Ho ritrovato in tutte non solo la parte superiore della testa con le sue quattro corna, ma sibbene anche l'inferiore colla bocca corredata delle sue labbra, col dente, e con una parte insieme del faringe.

Io qui non saprei dirvi se queste lumache fossero di quella spezie, che i Francesi chiamano *Escargot*, e che sono descritte e delineate dallo *Swamerdamio* nella sua *Biblia naturæ*. Se rifletteva alla loro figura, in generale mi sembravano appunto di quelle; ma guardate con più di attenzione e coll'ajuto di una lente piuttosto dolce, siccome suol dirsi, parea che vi corresse qualche divario: imperciocchè quelle dello *Swamerdamio (Tav. 2. fig. 7.)* hanno il corpo sparso qua e là di tubercoletti isolati, e di figura irregolare. Laddove le mie erano tutte seminate di tubercoletti bislunghi, strettamente uniti insieme sì che apparivano come altrettante vescichette ellittiche, e pellucide; non tutte veramente di ugual grandezza, ma pressochè tutte, e di certo non isolate, e contornate da altra sostanza palese all'occhio. Queste vescichette però erano bislunghe, quando il corpo della lumaca allungavasi, e quando si raccorciava, divenivano rotonde.

Da questa qualunque descrizione voi riconoscerete meglio di me, siccome valente Naturalista che siete, quale spezie di lumache si fosse quella, sulla quale ho fatto le mie sperienze. Forse il nome francese *Escargot* indica soltanto le chiocciole in genere, e non già ne significa una spezie particolare.

Passo ora a darvi i risultati delle mie osservazioni, e vi fo sapere che di diecisette lumache non me ne sono restate vive, che quattro solamente. Se di questa disgraziata morte debba accagionarsi il caldo eccessivo della stagione, o la mia soverchia curiosità che mi faceva visitarle spesso senza voler considerare che il taglio, o separazioni di una parte sì rispettabile potea divenir più fatale per l' azione dell' aria, e del Sole, a cui le esponeva lungamente per osservarle con attenzione, io non so ben deciderlo. Esser potrebbe ancora, che la tarda evoluzione della testa, siccome sentirete appresso, sia stata un effetto della mia tardanza nell' accingermi alle sperienze: non essendo forse difficile a credersi, che se ciò avessi fatto nel fiore della primavera, dove tutto ciò, che vive, è più vispo, e sugoso, che in altri tempi, e le lumache mi sarebbero restate vive in maggior numero, ed avrebbero rifatta più presto la nuova testa.

Non crediate però, che mancassero di vita contemporaneamente. Due morirono dopo quattro giorni: una terza appresso giorni ventotto: altre due scorso il dì trentuno: tre altre passati trentatre dì. Poscia ne trovai morta una dopo giorni sessantasei, e quattro altre a capo di ottantaquattro da quello dell' amputazione.

E' da notarsi ancora, che non tutte tredici hanno lasciato di vivere, senza aver dato prima alcun segno della riproduzione della testa troncata. Imperciocchè due di esse aveano incominciata molto sensibilmente questa riparazione, e le corna maggiori erano rifatte più della metà; siccome pure molto avanzate le labbra, ed il dente. Eravi però un difetto, o mostruosità nelle nuove di una delle due: perchè non erano separate, come sogliono essere, ma unite in guisa che rappresentavano un solo corno, e di figura perfettamente conica.

Nelle altre undici, siccome in tutte le altre, osservai per ordine le seguenti mutazioni, le quali in altre accaddero più presto, in altre più tardi. Ne' primi dì, dopo l' amputazio-

ne, il troncone mostravasi quasi piano: appresso sorgeva lentamente un tubercoletto, sì che il troncone appariva convesso: la pelle sagrinata, ossia la cute, si avanzava un poco più verso gli orli del tubercoletto indicato: dal centro di questo tubercoletto si alzò un punto negro in quella che rifece le corna unite in uno; là dove nelle altre cinque, che ripararono la testa per intiero, li punti neri furono due, uno per parte del tubercoletto, e continui a un filo nero, che si osservò in appresso. Que' punti negri erano manifestamente gli occhi, e i fili erano i nervi ottici.

I progressi di questa nuova evoluzione furono piuttosto lenti, generalmente parlando: dacchè il tempo più corto al certo principio dello sviluppo delle corna maggiori, e del labbro superiore, si fu di dodici giorni in una delle sei: il più lungo di giorni novantasette in un' altra: in giorni diciannove, in ventotto, in trentasei, in quarantanove, diede principio nell' altre l' indicato sviluppo, il quale non ebbe compito fine, in quelle che mi rimangono, se non dopo quattro mesi e mezzo finiti. E qui posso assicurarvi, che a tutta ragione dico aver avuto lo sviluppo della testa compito fine: e ciò non tanto perciò che ne mostra l' occhio armato di lente, ma sibbene anche perchè hanno palesemente rosicchiate delle foglie tenere di lattuca; della qual' erba ho veduto che quattro (e son quelle, che vivono attualmente) se ne servivano ancora come di cartella, avendola tirata molto addentro della lor buccia.

Nè dee recarvi meraviglia se la provvida natura ha suggerito loro questo ripiego, quando vi sovvenga di aver voi similmente veduto, che le lumache senza testa, e quindi per lunga stagione digiune, mancano poi dopo in certo tempo di quel glutine, con cui la risarciscono allorchè l' hanno perduta; e quando la riproducono, essa è sempre più tenue, cioè in ragione del tempo del loro digiuno.

Ho detto che incerto è il tempo, in cui mancano di materia riparatrice della cartella: e ciò perchè alcune cessarono di risarla dopo diciannove giorni, ed altre appresso quarantotto. Questo difetto di glutine fa temermi ancora della vita delle quattro che mi restano di tutto il numero. Ed avvegnachè io le conservi in luogo tiepido, e vivano certamen-

te, anzi in pruova di avere mangiato abbiano rifatta una tenuissima cartella, pure non mi lusingo che la possano durare a lungo, essendo elleno nutrite pochissimo, e quindi inette a vivere lungamente.

Di queste mie sperienze poco ancora mi resta a dirvi; nè vo' tacervelo, sebbene si tratti di cosa, che voi pure avrete molte volte osservata. L' una si è, che più tardo è il rifacimento delle corna minori rispettivamente alle maggiori, e alle labbra: l' altra, che in alcune le corna non sono talvolta uguali in lunghezza e grossezza: e finalmente, che non ho mai veduto, che si rifaccia la pelle sagrinata.

Ho epilogato fino a qui i successi delle osservazioni, che m' imponeste di fare. Io non so veramente qual fosse l' oggetto del comando vostro circa una materia, che voi, Amico pregiatissimo, prima d' ogni altro, indi il celebratissimo Amico nostro comune Sig. *Bonnet*, ed anche altri illustri osservatori maneggiarono con tanta bravura ed evidenza. Non mi posso recare a credere, che v' abbia persona dotta, che oggi dubiti di questo fatto, dopo la diligenza, la precisione, e le avvertenze vostre per non omettere alcuna delle circostanze, dirette al felice e niente dubbioso esito delle sperienze. Tuttavia se per avventura v' ha alcuno che non presti fede a quanto su questo argomento voi dottamente pubblicaste, io mi lusingo che vorrete invitarlo a venir qui tra noi, e replicare in compagnia vostra le contraddette osservazioni. Sono ecc.

Di Padova 27 Dicembre 1783.

IL VOSTRO CALDANI.

Reverendiss. Sig. Sig. Pad. Colend.

Dal gentilissimo foglio di V. S. Reverendiss. ho compreso ch' ella desidera di avere qualche notizia delle osservazioni da me fatte intorno alla riproduzione della testa delle lumache. Il di lei desiderio è per me un espresso comando, a cui ubbidisco tanto più volontieri, quanto che ho la piacevole soddisfazione di annoverarmi tra quelli, che hanno con-

fermata questa di lei scoperta; avendo tentate felicemente alcune esperienze, delle quali gran parte, per essere stata sottomessa all' esame del pubblico, per convincere alcuni Critici, che pubblicavano questo fatto di fisica animale come impossibile, ha perciò acquistato quel grado d' autenticità, che da taluni forse in questa sorta di prove potrebbesi credere necessaria, affine che possano valere a dimostrare senza contrasto, che la rigenerazione della testa di questi rettili non è una semplice visione di alcuni pochi Naturalisti.

Le prime mie esperienze furono fatte l' anno 1780 in occasione, che in certi Fogli, i quali si pubblicano ogni settimana fra noi, trovai inserite alcune lettere in cui da certi Anonimi io era sfidato a mostrare la riproduzione della testa delle lumache, ch' ella recise in mia casa la prima volta, che venne in questa città. Non potendo soddisfare alla loro curiosità per esser periti tutti que' rettili, cred' io per cagione della alterazione avvenuta nella crusca, dentro la quale per conservarli furono da me incautamente riposti tutti bagnati, e riflettendo che a nulla sarebbe servito per convincerli il citar loro le felici prove fatte da *Müller*, *Schaeffer*, *Roos*, *Bonnet*, *Lavoisier*, ed altri accuratissimi Naturalisti, che confermarono questa scoperta, deliberai di rifare di nuovo le esperienze.

Presi a 10 di Luglio, tempo che è reputato il più favorevole al buon esito delle riproduzioni, dodeci lumache della specie, che *Linneo* nella Fauna Svecica chiamò *Helix pomatia*, e simili a quelle che inviai a V. S. Illustriss. l' anno passato. Premuroso che le mie prove riuscissero a dovere, non mancai d' usare tutte quelle precauzioni che mi sembrava richiedere questa specie di delicate esperienze; trascurando le quali avviene che questi rettili periscano, come appunto per mancanza delle dovute precauzioni perirono quelle decapitate da' Signori *Adanson*, e *Bomare*, e dal P. *la Cotte*. Non volli pertanto (ed ella forse in ciò mi troverà troppo scrupoloso) per farle sortire dal guscio immergerle nell' acqua, come ella aveva praticato, e come senza che ne avvenisse pregiudizio a quelle sue lumache praticò il Sig. *Bonnet*. Ma posatele su delle tenere erbe aspettai pazientemente, che uscissero dal guscio da per se stesse. Quando vedeva, che aveano

ben allungata la testa, con un pajo di ben affilate forbici la recideva loro immediatamente al di dietro delle grandi corna. La parte recisa d'ogni una era da me accuratamente esaminata, proccurando che chi assisteva a questa operazione osservasse in essa le quattro corna, la bocca, e persino i denti, affinchè la testimonianza di spettatori potesse addursi per risposta a' nostri Censori nel caso che seguendo la riproduzione mi avessero obbiettato, per impugnarla, quello che obbiettava il Sig. *Adanson*, cioè a dire, che non erasi tagliata la testa, quella macchina compostissima, quale ce la dimostra la notomia fattane da *Swamerdam*, e da *Muralt*, ma la di lei semplice calotta. Finita l' operazione rinchiusi le lumache in una giarra, che ricoprii di carta tutta forata affine che l'aria interna potesse cangiarsi e non divenisse nocevole alla vita di questi rettili. A 28 d' Agosto ritrovai tutta lacerata la carta che serviva di coperchio, ed alcune lumache attaccate alla superficie esterna del vaso. Posatele di nuovo sull' erba, esse uscirono fuora del guscio, e le ritrovai tutte dodeci vive. La riproduzione però non era in tutte egualmente avanzata, perciocchè in alcune solo se ne vedeva il principio, mentre in altre era quasi del tutto compita. In alcune vedeasi spuntare sul troncone una specie di globetto biancastro, in altre sul globetto già più cresciuto si vedevano ripullulare uno, o più corna disuguali in grossezza, ed in lunghezza, osservandosi, che le corna posteriori invece di terminare con una specie di globo terminavano in un apice su cui appariva un punto nero, che certamente era l' occhio. In quelle poi nelle quali la riproduzione era quasi del tutto ultimata vedeasi la testa distinguibile dall' antica, per un certo colore meno carico, e per essere essa non ancora ben fornita di tutte quelle parti, che entrano nella sua composizione, giacchè in altre di queste vi era solamente formato uno delle corna maggiori, in qualche altra si osservavano tutte due, ma non egualmente lunghe, in qualche altra oltre le corna maggiori ripullulavano ancor le minori. Io amputai di nuovo la testa ad una di queste lumache, nella quale ritrovai che non erasi ancora riprodotto il dente, mentre la lacerazione della carta sopraddetta che copriva la giarra mi aveva assicurato, che in alcune i denti erano già rigenerati.

Veduto

Veduto il felice succeſſo di queſte eſperienze, mandai molte di queſte lumache all' Editore de' pubblici fogli con una lettera nella quale lo pregava d' invitare i noſtri Cenſori ad oſſervare il riſultato delle mie prove. Io ebbi la ſoddisſazione di leggere nei fogli ſeguenti una loro riſpoſta, nella quale confeſſavano eſſere reſtati convinti, che la rigenerazione della teſta delle lumache era una fiſica verità, che eſſi avevano riguardata fin' allora come un prodigio non ancora ben accertato, ſedotti dall' eſito di alcune loro prove mal eſeguite.

Io non avrei più penſato a decapitare altri di queſti rettili ſe ſorpreſo dalla varietà che oſſervai nei ſopraddetti sì riguardo ai progreſſi della riproduzione nei diverſi individui, sì riguardo all' ordine della rigenerazione delle diverſe parti della teſta, non mi foſſi invogliato d' inveſtigare da quali principj dipendano queſte varietà. La coſtanza, con cui ſi oſſervano queſte tali bizzarrie, come conobbi paragonando le mie eſperienze con quelle di V. S. Reverendiſs., e de' Signori *Bonnet*, e *Senebier*, m' avevano accertato, che eſſe non potevano averſi per ſcherzi della natura, ma che dovevano dipendere da leggi coſtanti ed invariabili. Ma queſte leggi ſono forſe determinate dal taglio, oſſia che queſto ſi faccia più o meno avanzato, oſſia che ſi faccia più o meno obbliquo? Queſta queſtione, ch' Ella tra le altre ha propoſta nel ſuo *Prodromo*, fu quella che mi propoſi di eſaminare.

Preſi a tal oggetto ſulla fine di Febbrajo dell' anno ſcorſo dodeci lumache della medeſima ſpecie delle ſopraddette, ed uſate tutte quelle precauzioni, che aveva praticate colle prime, reciſi loro la teſta, diverſificando a bella poſta il taglio. Nella metà di eſſe feci il taglio verticale, ma alcun poco più diſtante dalle grandi corna di quello che io aveſſi praticato nelle prime; nell' altra metà lo feci più, o meno obbliquo, laſciando in alcune intatto uno delle grandi corna. Le lumache furono eſſe pure al ſolito rinchiuſe in una giarra coperta nell' iſteſſo modo, e dopo un meſe avendole viſitate, ne ritrovai cinque morte, mentre l' altre ſette aveano formato il loro coperchio. Su queſte avrei voluto fare le mie oſſervazioni; ma riflettendo che avrei dovuto far loro qualche violenza per farle uſcire dal guſcio, me ne aſtenni, ricordatomi di ciò che dice il Sig. *Plateretti*, che le violenze, che

si praticano a questo oggetto su questi rettili, lor divengono fatali, e sono sovente la cagione per cui si vedono andar a vuoto le esperienze. Aspettai fino al principio di Luglio, nel qual tempo rotto il coperchio, e posatele sull' erba le ritrovai tutte sette vive, osservando che in esse, siccome era avvenuto nelle prime, la riproduzione non era egualmente avanzata. Di quelle a cui aveva fatto il taglio verticale due sole erano sopravvissute. Sul troncone di una di queste si vedeva spuntare un globetto bianchiccio, su cui rinasceva un corno, nell' altra la testa era quasi rigenerata del tutto, e vedevansi alzate due delle grandi corna, ma ineguali in lunghezza. Nelle altre cinque di quelle, in cui il taglio erasi fatto obbliquamente, manifestavasi la riproduzione sotto l' apparenza di una massa informe, e che non aveva ancora presa quella giusta conformazione, che avrebbe dovuto avere. In alcune di queste si vedevano già rigenerate, e più o meno cresciute quelle corna, che erano state amputate, mentre in altre non ripullulavano ancora.

In queste mie seconde esperienze avendo osservata quella medesima varietà che mi si era presentata nelle prime, nelle quali il taglio erasi fatto uniforme, sarei stato quasi inclinato a decidere che l' ineguaglianza della forza riproduttrice, che agisce nei diversi individui, siccome pure l' ineguaglianza di questa medesima forza, che agisce nelle diverse parti della testa, sia affatto indipendente dal taglio. Ma pensando che le leggi, con cui la natura regola questi fenomeni, non devono determinarsi da poche, ma da molte, e replicate osservazioni, io stimai meglio sospendere per allora il mio giudizio, e moltiplicare le mie sperienze.

Egli è perciò che sul finire dell' estate passata in compagnia del Sig. D. *Mongiardino* feci l' amputazione della testa ad un gran numero di lumache, diversificando il taglio in molte e differenti maniere, e non solo feci il taglio verticale una o più linee dietro le grandi corna, e lo feci ancora più o meno obbliquo; ma in altre una, o più linee avanti le corna maggiori, ed in altre non recisi che la sola metà della testa. Poche sono perite, e le rimanenti osservate da me nei scorsi giorni vivono tuttavia. Ma nella presente fredda stagione, siccome giusta quello che scrivono li Signori *Pla-*

teretti, e *Troia*, ed io ho pure verificato nelle mie feconde efperienze, la forza riproduttrice non è che pochiffimo attiva, io non potrò foddisfare ancora per lungo tempo alla mia curiofità.

Il gran numero delle lumache, che nella fcorfa primavera inviai a V. S. Reverendifs., avrà forfe fervito a mettere in chiaro le leggi, da cui dipendono quefte varietà. Io mi lufingo, che le efperienze, ch' Ella avrà tentate fopra di quelle, avranno avuto principalmente per ifcopo di decidere le queftioni, che da lei furono propofte nel fuo *Prodromo*, e che conducono alla fcoperta di quefte medefime leggi. Le farò moltiffimo obbligato, fe fi compiacerà di fignificarmene il rifultato. Io non dubito, quando Ella fiafi occupata di quefte ricerche, che da quella fua accortezza, con cui ha faputo forprendere la natura in molti de' fuoi più ftupendi ed ofcuri lavori, non fia condotta al fuo termine la teoria di quefte riproduzioni. La quale è tanto più intereffante, quanto che ferve ad illuftrare moltiffimo la Fifica animale.

Io fono col più profondo rifpetto

Di V. S. Reverendifs.

Genova 10 Gennajo 1783.

Umilifs. Obbligatifs. fervitore
GIO: BATTISTA PRATOLONGO.

Al Signor Abate

LAZARO SPALLANZANI

Regio Profeffore di Storia Naturale nell' Univerfità di Pavia e Soprantendente al pubblico Mufeo della medefima.

MICHELE GIRARDI

A. C.

Il ricercarmi che fate, perchè io di nuovo tenti l' efperienze voftre fopra le lumache terreftri, altro non è che un effetto manifeftiffimo di quella imparziale premura, che vi

guida, per lo ſcoprimento del vero entro i miſterioſi arcani della natura, onde ſempre più luminoſa trionfi con la verità l' eſattezza delle oſſervazioni voſtre, le quali ſono ſu di tal baſe appoggiate, che l' ingiurie dell' invidia non temono nè quelle del tempo. Egli ſembra un fatale deſtino, che le ſcoperte più luminoſe e più utili abbiano dovuto in ogni tempo incontrare acerbi oppoſitori, i quali ſebbene non abbiano mai potuto offuſcare quei benefici raggi di luce, che trapelavano per diradare le tenebre, pure hanno ſervito talvolta a ritardarne gli ulteriori vantaggioſi progreſſi. Queſto inciampo nell' avanzamento delle cognizioni umane da due fonti, s' io mal non m' appongo, mi è ſembrato mai ſempre derivare, cioè dalla preſunzione, che d' ordinario è figlia dell' ignoranza, e dall' invidia: dalla preſunzione, perchè taluni, sdegnando di oſſervare, non ſanno, nè poſſono perſuaderſi che vere ſiano quelle coſe, che ſorpaſſano i limiti del loro riſtretto ſapere; quindi ignorando quanto vi è di maraviglioſo e ſorprendente nel mirabile artificio della natura, tutto ciò, che non ſanno, negano francamente: dall' invidia poi, perchè certi accigliati uomini, che vorrebbero ſedere a ſcranna, tenendoſi per ſaputi aſſai, mal ſoffrono che altri veggano più lungi di loro; quindi inalzato tribunale, null' altro potendo, condannano imperioſamente tutto ciò, che intralcia loro il cammino, e ſi oppone all' apice di quella gloria, la quale ſoli pretendono poſſedere.

Fra queſti io non dirò certamente che ſiano mai li Signori *Adanſon*, *Wartel*, *Cotte* e tant' altri, e particolarmente il Sig. *Adolfo Murray*, uomo dotto ed ingenuo e mio particolare amico, ma ſibbene io credo che queſti illuſtri Signori ſi ſiano oppoſti alle voſtre ſcoperte, perchè rifatte non abbiano eſattamente l' eſperienze da voi inſtituite; oppure, il che è anche più ragionevole, le abbiano ſoltanto rifatte in alcune di quelle lumache, nelle quali il rinnovamento del capo non avviene, come noi pure non di rado abbiamo oſſervato. Queſti ſoli adunque per mio avviſo meritano, che ſi renda loro ragione di queſto mirabile e particolare fenomeno, giacchè inutile ſarebbe per gli altri, che nè ſanno, nè vogliono perſuaderſi.

E prima ch' io vi traſcriva il riſultato delle mie oſſerva-

zioni, giacchè faſtidioſo troppo ed a voi inutile per certo ſarebbe il deſcriverle minutamente, permettetemi ch' io vi accenni quello, che oſſervare ho potuto nel notomizzare, per quanto è a me ſtato poſſibile, le lumache, e particolarmente la teſta di queſte, la quale è per avventura molto più compoſta di quello che taluno potrebbe facilmente darſi ad intendere. Quanto però difficile ſia il far queſto, allora che vivono, lo conoſce facilmente chi dar ſi voglia la pena di eſaminarle: mentre o voglianſi oſſervare allora che ſtanno chiuſe nel proprio nicchio, ivi ſono così rannicchiate e riſtrette, che difficiliſſimo rieſce e quaſi impoſſibile all' oſſervatore di eſplorarle a dovere: oppure voglianſi conſiderare, allora che ſi ſtraſcicano diſteſe fuori del proprio guſcio, al ſolo toccarle ſi contraggono, ſi ritirano sì ſollecitamente e per modo entro la loro abitazione, che roveſciataſi internamente con la parte anteriore del piede la cute del collo, vanno a rannicchiare, ed a naſcondere la teſta quaſi nel centro del proprio corpo, producendo così quelle difficoltà, che abbiamo teſtè accennate; le quali difficoltà maggiori ancora ſi fanno, ſe vogliamo aggiungere quel tenace e viſchioſo umore, che in copia effondono, e la validiſſima forza muſcolare, che hanno, mercè della quale allora che vengono tocche dal coltello anatomico, le parti ſempre più fortemente ſi reſtringono fra loro.

Per declinar dunque per quanto ſia poſſibile da queſte difficoltà, tre furono le maniere da me uſate nel notomizzar le lumache, la prima già propoſta dal celebre *Swammerdamio*, a cui tanto dobbiamo in queſta parte, laſciandole morire nell' acqua; l' altra di levarle dal guſcio, allora che ſono in moto, laſciandole così perire; la terza di riporle nell' acqua fredda, facendole indi nella medeſima per alcun poco bollire: nelle quali differenti maniere ſiccome non di rado avviene che rimangono col collo, capo, e talvolta anche con le corna fuori del guſcio diſteſe, così mi hanno ſomminiſtrata occaſione, onde poterle comodamente oſſervare.

La lumaca conſiderata allora che ſi ſtraſcica, portando ſeco la propria abitazione, o morta in poſizione che a queſta riſponda, moſtra per lo innanzi un lungo collo, il quale va a terminare nella teſta, da cui ſpuntano quattro corna, due

maggiori e ſuperiori, due minori ed inferiori, le quali allungate che ſieno, internamente moſtrano nelle eſtremità un picciolo globo, dal quale nelle due maggiori trapela un punto nereggiante, che diceſi l' occhio. La parte poſteriore del collo ha il ſuo confine in una prominenza circolare, che comunemente labbro o pur collare vien detta, nella cui deſtra parte ſcorgeſi un foro aſſai manifeſto inſerviente alla reſpirazione, ed in cui mette foce quell' inteſtino, donde eſcono gli eſcrementi. La parte ſuperiore del collo e della coda è coperta di una pelle ſagrinata glandulare, e variamente colorita ſecondo le diverſe ſpecie delle lumache. La parte inferiore, di cui ſerveſi la lumaca per iſtraſcicarſi, e che dicono piede, è liſcia facile coperta da tenuiſſima membrana, nel cui centro ſi veggono delle linee longitudinali, ed ai lati delle tranſverſali, che altro non indicano ſe non i faſcetti dei ſottopoſti muſcoli inſervienti alle varie loro azioni e reazioni. Quella parte anteriore ed eſtrema del piede, che corriſponde alla mandibola inferiore, con eſſa non ſi congiunge, e vi laſcia un picciolo vacuo intervallo tra l' una e l' altro, il che forſe è fatto, perchè la mandibola ne' ſuoi neceſſarj moti eſſer poſſa più libera e più ſpedita. Al di ſotto delle corna minori ſi ſcorgono i labbri, che qualora ſi aprono, oltre i piccioli denti ſi vede la cavità della bocca e la lingua. Finalmente ſotto del deſtro corno maggiore, e forſe un poco poſteriormente vicino al piede vedeſi un tenue e bianco ſegno tra i piccioli granelli della cute, il quale è già noto null' altro eſſere ſe non ſe l' apertura ſemminile: e ſiccome le lumache tutte ſono ermafrodite, così al lato di queſte eſce l' arneſe maſchile (*a*) inſerviente alla generazione. Queſto ſegno, che anche dai più eſercitati difficilmente ſi ſcorge, diventa egli così turgido nel tempo degli amori, che compariſce manifeſtiſſimo. Mi è egli avvenuto più d' una volta di ſorprendere queſti animali nel tempo del loro accoppiamento, e di vederli ancora, allora che ſtanno per accoppiarſi. Riſcontrati che ſi ſono, ed approſſimatiſi l' uno all' altro, rieſce piacevole il vedere, come ſcambievolmente prima d' unirſi ſi tentano, e ſi

(*a*) Tav. I. let. *b*.

ritentano col capo e col collo, e quasi a vicenda l' un l' altro solleticandosi s' invitano all' accoppiamento. Quindi disposti e dall' estro amoroso eccitati, arrovesciando fuori del capo il loro arnese maschile di ceruleo sangue turgido e gonfio, a vicenda e nel tempo medesimo l' introducono nell' aperta femminile natura, ed ivi l' internano, e vi si approfondano, e vi si avviticchiano per modo, che volendoli indi disgiungere, talvolta anche dopo due ore e più, piuttosto frangonsi i loro arnesi maschili, di quello che essi dal loro accoppiamento desistano. In questo forzato distendimento facile è l' osservare, come i canali, in cui si produce internamente l' arnese maschile, comprendano, e stringano il principio dell' appendice dell' utero e della vagina, che tutto trovasi in questa circostanza di sangue ceruleo intumidito e distinto.

Questo è quello, che si può vedere senza il soccorso del coltello, il quale però rendesi necessario, qualora vogliasi esaminare l' interna organizzazione e particolarmente del capo, che è l' argomento principale delle nostre ricerche. Recisa dunque nella parte superiore di mezzo longitudinalmente la cute e con questa il muscolo cutaneo, che copre il collo ed il capo, e rovesciata ai lati, si vede prima d' ogn' altro, oltre una tenue aracnoide membrana nella parte anteriore ed estrema, un globo quasi ovale (*a*) e prominente, che comprende le due mandibole, la bocca, la lingua, ed il cominciamento ancor dell' esofago. La mandibola superiore è cartilaginosa, e forma interamente il palato. Dalla parte anteriore ed estrema di questa propende un dente semilunare osseo, che sembra al colore ed alla figura uno di que' pettini di tartaruca, ai quali le nostre donne sogliono per vaghezza raccomandare posteriormente al capo gl' inanellati capelli. Questo dente non è che un aggregato di sei o sette denti incisori tutti appuntati inferiormente, ma agglutinati ed uniti in maniera, che formano un solo dente.

La mandibola, o piuttosto gengiva, o labbro inferiore non ha denti; è come distinta da due corpi molli laterali, quasi cilindrici, che comprendono d' ogni lato la lingua, il colo-

---

(*a*) Tav. I. let. *bb*.

re dei quali è posteriormente carico ai lati dell' esofago. La bocca è circonscritta anteriormente e posteriormente da' denti e dall' esofago, superiormente ed inferiormente dal palato e dalla lingua.

La lingua non è libera, ma ritrovasi tutta serrata ed unita alla gengiva inferiore. E' composta di due membrane ben resistenti, serrate e quasi cartilaginose. La superiore si unisce alla membrana, di cui è coperta la mandibola inferiore, e scorrendo all' indietro, s' inflette posteriormente, e discendendo s' incurva, e si produce anteriormente sotto la membrana inferiore; indi recedendo, va a terminare in una picciola, cieca, e globosa appendice *(a)*, che si vede prominente nella parte inferiore del globo ovale. Questa appendice contiene un bianco, allungato et incurvato cilindro solidetto, che mobile essendo, e corrispondendo alla parte anterior della lingua, ove comincia l' esofago, non sembra ivi essere dalla natura senza un particolare offizio costituito. La membrana poi inferiore e sottoposta della lingua, che è di molto più crassa della superiore, convessa superiormente, inferiormente cava e semicircolare, ha la sua radice nella parte anteriore della mandibola inferiore, e termina libera ove la superior membrana posteriormente s' inflette. Questa struttura particolare di lingua sembra fatta per supplire al difetto dei denti, che mancano, onde soffrendo gli alimenti l' azione del resistente palato e della lingua, l' opera della masticazione venisse ad essere adequatamente perfezionata.

Ove termina posteriormente il palato e la bocca, ivi comincia l'esofago, che si vede nella parte superiore e posteriore del globo ovale tra i due dutti salivali, che si uniscono al globo per penetrare nella cavità della bocca. E' questo nel suo cominciamento ristretto assai, ma in progresso si fa maggiore; è di un livido cenerino, ed è fatto di una tenue membrana a crespe longitudinali compiegata, mercè delle quali facilmente si dilata, e si stringe.

Sopra la parte anteriore del globo ovale ritrovasi talvolta il

---

(*a*) Tav. II. let. *d*.

il cervello (*a*), di color pallidetto e come diviſo in due lobi lateralmente allungati; diſſi talvolta, perchè il cervello delle lumache è mobile, e cambia di luogo, ſecondo le varie mozioni delle medeſime, ora ritrovandoſi anteriormente, ed ora ritirandoſi poſteriormente del globo ovale ſopra l' eſofago, maſſime allora che ſono fuori del guſcio allungate e diſteſe; il che avviene per opera di alcuni muſcoli, che ſcorrono ai lati del cervello, e che ſono mirabilmente ad eſſo per alcuni filamenti intralciati ed uniti. Queſto cervello, che non ha forſe in larghezza l' eſtenſion d' una linea, nè più di una e mezza in lunghezza, maggiore però e minore a norma della maggiore o minor grandezza delle lumache medeſime, compartiſce molti nervi, i quali ſebbene ſiano ſtati diſtintamente delineati dal celebre *Swammerdamio*, pure non mi ſembra fuor di propoſito il deſcriverli, come è a me avvenuto di vederli; avvertendo per altro che, ſe in queſti vi ſi riſcontraſſe qualche leggiera diverſità, io non intendo che attribuiſcaſi a difetto altrui, ma piuttoſto ſoffrirò che ſi aſcriva alla mia non ſufficiente deſtrezza in eſaminare ſimili minutezze; e maſſime che nel rintracciamento di queſte io non mi ſono ſervito di lente alcuna, per cui gli oggetti oltre al naturale grandeggiaſſero, baſtandomi di diſtinguerli ſenza ſoſpetto di travedimento o d' errore.

Dei nervi, che ſi propagano alla teſta delle lumache, altri ſono immediatamente procedenti dal cervello, altri mediante un ganglio, che vien formato dalle gambe (*b*) del cervello medeſimo, le quali abbracciano ſecondo la varia poſizion dello ſteſſo ora la parte anteriore del globo ovale, ora l' eſofago, e che ritrovaſi non molto maggiore di un grano di miglio al di ſotto, ed anche un poco poſteriormente, del globo ovale accennato. Seguendo l' ordine della ſezione, diremo in primo luogo dei nervi del cervello, indi di quelli del ganglio.

Dal cervello naſcono dodici nervi, cioè ſei per ciaſcun lato, ch' io comprendo in ſei paja: altri dei quali ſcorrono

---

(*a*) Tav. I. let. *i*.
(*b*) Tav. I. let. *l*.

posteriormente, anteriormente altri. Il primo, che diremo muscolare, nascendo dalle gambe del cervello medesimo va posteriormente ad inserirsi nel muscolo retrattore del globo ovale; gli altri cinque si distribuiscono anteriormente, e sono i labiali superiori, i labiali inferiori, i mandibulari, gli ottici maggiori, gli ottici minori. I labiali superiori nascono dalla parte anteriore del cervello, e scorrendo ai lati del globo ovale, si dividono anteriormente in due manifesti filamenti, l' uno dei quali va a spiegarsi nella parte superiore dei labbri superiori, l' altro termina nell' inferior parte dei labbri medesimi. I labiali inferiori cominciano inferiormente in vicinanza dei superiori, scorrono a lato dei primi, indi passano sotto al globo ovale, e vanno a distribuirsi in più filamenti nella mandibola o labbro inferiore. I mandibulari hanno origine nella parte posterior del cervello, e scorrendo posteriormente, s' inseriscono nel globo ovale in vicinanza dei dutti salivali, e si diramano per la bocca, gola, e palato. Gli ottici maggiori vengono dai lati del cervello, si attaccano per mezzo di una tenue membrana al muscolo motore de' corni maggiori, e vanno a terminare in un bulbo periforme nelle estremità dei corni medesimi. Gli ottici minori, oppure i nervi dei corni minori, nascono egualmente dai lati del cervello in vicinanza dei maggiori, s' uniscono al muscolo dei corni minori, e divisi in più filamenti vanno a terminare nell' estremità dei corni minori del muscolo cutaneo e della mandibola inferiore.

La denominazione di ottici minori, che attribuisco a questi nervi, e che può a taluno sembrar troppo arbitraria e fors' anche affatto inconveniente, fu da me desunta non dalle proprietà dei nervi medesimi, ma dalle affinità soltanto, che questi hanno con i nervi dei corni maggiori, i quali vengono comunemente chiamati ottici. Questi furono così denominati, dappoichè il celebre *Swammerdamio* ha saputo col mezzo di lenti acutissime ritrovare in quel punto nereggiante, che trapela nell' estremità di questi, organi inservienti alla vista, vale a dire l' uvea, i tre umori, e la lente cristallina compresa dalla sua membrana. Io non negherò questa mirabile struttura, la quale non sarà per altro facile a confermarsi; ma dirò soltanto, che le mie osservazioni m' hanno indotto

a credere, che, ſe v' è in queſti corni l' organo della viſta, v' è ancora certamente quello del tatto, anzi queſto tanto più ſenſibile di quello, quanto che l' organo del tatto è manifeſtiſſimo, e quello della viſta tanto debile e confuſo, che laſcia luogo a dubitarne moltiſſimo. Molte furono l' eſperienze da me fatte per pur vedere, s' io poteva trarmi dal capo queſta dubbiezza, ma tutt' inſieme altro non fecero che confermarmela maggiormente. Quando le corna erano ben allungate e diſteſe, e che i punti nereggianti trapelavano ad evidenza, io vi approſſimai varj corpi di vario genere e colore, ma queſti non mi diedero quaſi mai indizio di certa e diſtinta viſione, poichè di rado ho potuto oſſervare, che le lumache per queſti corpi, che ſtavano quaſi a contatto dei loro corni maggiori, o deviaſſero dal lor cammino, o ritiraſſero le corna, o almeno le infletteſſero per iſchivare i corpi medeſimi. E ciò, che accrebbe ancora la mia dubbiezza, ſi fu, che neppure alla viva luce d' un' acceſa candeletta, o al raccolto viviſſimo fuoco d' una lente non potei mai ottenere, che le corna maggiori cambiaſſero della lor natural direzione, ſe non allora quando il troppo intenſo calore le obbligava a ritirarſi. E ſebbene, replico ancora, mi ſia talvolta avvenuto, che nell' approſſimar loro un qualche corpo lucente oppure opaco, abbiano dato un qualche indizio della loro viſione, le replicate ulteriori eſperienze ſono ſtate così a queſto contrarie, che m' hanno o confermati i dubbj miei, o almeno fatto toccar con mano, che, ſe veggono queſti rettili, la loro viſta è debile fuor di modo e confuſa. Quanto però ſembrano eſſere difettoſi in queſto, altrettanto al tatto ſono ſenſibiliſſimi. Quindi è che, qualora ſi ſtraſcicano naturalmente, li veggiamo portare innanzi e ben diſteſe le corna maggiori, acciocchè da queſte a qualunque leggieriſſimo tocco poſſano eſſere avvertiti, come i ciechi dal lor baſtone, a deviare nel lor cammino dall' obice, che riſcontrano. Baſta veder le lumache, allora che vanno, per accertarſi di queſto. Muovonſi eſſe per modo, che ſembrano andar tentone, e quaſi brancolando, nè certo ſi arreſtano per qualunque corpo loro ſi ponga dinanzi, ma allora ſoltanto, e come ſorpreſe, qualora in eſſo s' incontrano, ed urtano con le corna, che ſubito ritirano; poſcia allungandole di nuovo ſembrano

toccando, e ritoccando ritentare con esse, e quasi sospese l'intoppo medesimo, e prendendo dal lor tatto come norma alla lor direzione, o deviare dal lor cammino se l'obice è forte, o se leggiero continuarlo. La qual cosa se è di fatto, come apparisce, sembra ragionevole l' inferire, che le lumache non abbiano occhi, o se pure gli hanno, la natura non potendo altrimenti gli abbia di parti minutissime, e quasi impercettibili composti, onde possano esse, non già con distinzione e chiaramente, ma debolmente ed in confuso vedere gli oggetti; sostituendo poi alla minutezza di questi l' esquisitezza del tatto, onde conoscere distintamente gli oggetti medesimi. Quindi facile riesce l'intendere a qual uso servir debbano le globosità, che si osservano non solo nelle corna maggiori, ma nelle minori ancora, vale a dire perchè la superficie si faccia maggiore, e così i punti dei contatti si moltiplichino, onde maggiore si renda in benefizio e difesa delle lumache la squisitezza del tatto medesimo. Ma questa non è che una semplicissima congettura da me a voi, che sentite tant' oltre in queste materie, per particolar mio lume e rischiaramento proposta.

Ritornando alla organizzazion del cervello, abbiamo veduto, che le gambe di questo compongono il ganglio, come la protuberanza anullare è composta dalle gambe del cervelletto umano. Da questo ganglio si diramano molti nervi, altri de' quali vanno anteriormente, altri lateralmente, posteriormente altri, ed altri infine inferiormente; diremo ora soltanto di quelli, che scorrono anteriormente al capo, siccome quelli che riguardano particolarmente il nostro argomento. Dalla parte anteriore di mezzo si produce un nervo, che va con retta linea a piantarsi nella parte inferiore e posteriore del globo ovale. Dai lati escono due fascetti di nervi, uno per ciascun lato, che si spiegano per il muscolo cutaneo in più diramazioni, alcune delle quali scorrono fino alle radici de' corni maggiori, e nella destra parte s' inferiscono ancora nel prepuzio e nella vagina. Delle moltiplici poi diramazioni dei nervi inferiori alcuni scorrono anteriormente, e vanno a perdersi nell' estremità anteriore del piede.

Restano finalmente i muscoli del capo, che sono il retrattore del globo ovale, i due retrattori dei corni maggiori,

due dei corni minori , due mandibulari , che tutti vengono dai mufcoli, che fi partono dalla colonna fpirale . Il retrattore del globo ovale, che è il maggiore di tutti, va ad inferirfi nella parte inferiore e pofteriore del globo accennato. I retrattori dei corni maggiori fi tingono anteriormente di color fofco ofcuro , e terminano in un corpiccino folidetto, oblongo, fchiacciato e cavo, che finifce verfo l' eftremità dei corni maggiori . I retrattori minori paffano ai lati del cervello, a cui fono aderenti mercè gli ottici minori, indi verfo l' eftremità fi dividono in due , il minore dei quali paffa all' eftremità delle corna minori , il maggiore fi diftribuifce nel fottopofto mufcolo della pelle. I mandibulari afcendendo in più fafcetti di fibre divifi e diftinti , inclinati a vicenda l' un contro l' altro vannofi ad unire fino all' apice della mandibola inferiore nel mufcolo cutaneo parimenti diftribuiti. Oltre quefti , altri ve ne fono ancora , che febbene tenui ed a guifa di filamenti, pure fono eleganti affai, e meritano d' effere ricordati, e diftinti . Quefti , ch' io chiamerò col nome di briglie, fi veggono fuperiormente , e nella parte inferiore del globo ovale . Le briglie fuperiori (*a*) fono femplici , le inferiori fono triplici. Le fuperiori fono ai lati del globo ovale in vicinanza dei dutti falivali, e terminano nei labbri fuperiori. Le briglie inferiori fi dividono in maggiori, minori, e minime, ovvero lunghe, brevi, e breviffime . Le lunghe (*b*) nafcono fotto il globo ovale nel luogo , ove s' inferifce il mufcolo retrattore , e vanno a terminare al lato interno delle corna minori . Le brevi (*c*) cominciano un poco più avanti delle più lunghe quafi nel mezzo del globo ovale, indi divergendo, e decuffandofi con le lunghe, vanno a terminare nel lato efterno delle corna medefime . Le minime o breviffime (*d*) hanno origine avanti le brevi , e terminano quafi rettamente nell' eftremità del mufcolo cutaneo fottopofto alla mandibola inferiore. Qualora fi contraggono, quefte bri-

(*a*) Tav. I. let. *c*.
(*b*) Tav. II. let. *ee*.
(*c*) Tav. II. let. *f*.
(*d*) Tav. II. let. *g*.

glie ritirano i labbri, e portano innanzi il globo ovale; la qual azione è di tanta importanza, che difficilmente si spiegherebbe, come senza di queste briglie si potessero le mandibole portar tanto avanti, che il dente talvolta si spingesse a livello dei labbri, e quasi oltre ancora, come non di rado avvenire si vede, qualora le lumache prendono cibo, e massime allorchè tentano di afferrare col dente un qualche incomodo bricciolino.

Ora che abbiamo detto quale sia la mirabile struttura del capo delle lumache, passerò a descrivervi il risultato delle mie ultime osservazioni, giacchè queste istesse furono da me fatte sino dal 1772 e 1773 con quelle conseguenze medesime, che voi prima d' ogn' altro avevate nel vostro *Prodromo sopra le riproduzioni animali* accuratamente descritte. Queste esperienze furono da me fatte su di quelle lumache, che dal celebre *Linneo* furono chiamate *Helices*, *Pomatiae*, *Italae*, *Lusitanicae*, *Zonariae*, *arbustorum*, *nemorales*, *lucorum*, *griseae ecc.* Il primo di Maggio del 1782 recisi le corna maggiori a ventiquattro di quelle lumache, che voi mi faceste tenere da Reggio, a tante altre recisi le maggiori e le minori, ad un egual numero l' estremità della coda, a ventiquattro pure recisi il capo, e per fine a tante altre un lembo laterale del piede di più di due linee in larghezza, e di dieci circa in lunghezza, e queste varie recisioni furono nel giorno medesimo da me ripetute in altrettante lumache parmigiane, che erano delle spezie medesime delle reggiane. Le prime lumache furono da me segnate con lettera *A*, le seconde col *B*, e così le altre tutte distintamente, ed indi in varj canestri egualmente distinti riposte, e custodite. Con taglienti forbicette recisi le corna, allora che erano interamente uscite dal capo, ad alcune alle radici, ad altre per metà. Il capo poi, la coda, ed il piede con affilato coltello, allora che si strascicavano bene sporte fuori del guscio sopra d' un piano eguale e resistente, e ciò per essere più sicuro del taglio, e per ischivare quegl' inconvenienti, che di frequente avvengono, qualora di forbici servir ci vogliamo nell' ampu-

tazione di queſte parti e particolarmente del capo (*a*) . Il luogo dell' amputazione di queſto fu allo incirca una linea e mezza al di dietro delle corna maggiori.

Quello , che mi è avvenuto di oſſervare nella reciſione di queſte parti, eccovelo brevemente. Dalle corna, e dalle maggiori particolarmente, ho ſempre veduto eſcire un umore ceruleo, che bagna d' ordinario il tagliente metallo. E' facile il veder queſt' umore, qualora ſott' acqua ſi recidono le corna, e faciliſſimo poi, ſe l' acqua medeſima ſia dai vivi raggi del ſole penetrata. Non ſolo ſi ſcorge allora, che l' umore, che eſce, è ceruleo, cioè il ſangue, che ſcorre per i canali di queſti rettili, ma ſi conoſce ancora la forza, con cui eſce, e da lungi zampilla, e la quantità; eſſendomi non di rado avvenuto di vederlo continuato per più e più minuti ſecondi, e ſoſſermato di vederlo per la ferita medeſima ad eſcire di nuovo con forza e quantità maggiore . Alla qual coſa ſe ſi aggiunga , che talvolta le corna veggonſi floſcide , appaſſite e cadenti ſopra i labbri, qualora ſiano ſtate reciſe alle eſtremità, e l' impotenza di poterſi più oltre intumidire, e diſtendere naturalmente, ſembra che non foſſe per eſſere di gran lunga lontano dal vero chi penſaſſe, che a queſto ſolo umore ſi doveſſe l' arroveſciamento eſteriore e diſtendimento delle corna , giacchè in tutta l' interna organizzazione , per quanto io m' abbia potuto cercare, non mi è mai riuſcito di vedere nè muſcolo nè tendine nè troclea, che poteſſe eſſere a queſt' officio inſerviente. Queſto umore medeſimo ed in quantità maggiore eſce egualmente all' amputazione del capo, meno poi nella reciſione del piede e della coda, e frammiſchiato ad un umore tenace e viſchioſo. Le corna reciſe ſubito dopo l' amputazione o non danno più ſegno di vita, o tenue aſſai e breviſſimo. Non però così le teſte, mentre dopo tre, quattro, e talvolta ſei e ſette minuti ed anche più , irritando le loro corna , moſtrano apertamente che conſervano ancora una ſenſibilità non equivoca . Reciſa appena la teſta ſi contraggono toſto , e ſi ritirano nel proprio guſcio ; alcune pe-

---

(*a*) Queſta lodevole precauzione è ricordata ancora dal Sig. Dottore *Vincenzo Plateretti* nella Scelta di Opuſcoli, che ſi pubblicano dottamente in Milano.

rò di queſte poco appreſſo compariſcon di nuovo, moſtrando appena nel luogo dell' amputazione già contratto un bianco e ben riſtretto ſegno nel centro, e veggonſi indi ſtraſcicar come prima e così viſpe, come ſe il capo loro reciſo non foſſe.

Queſta facilità di moto e queſta vivezza nelle lumache decapitate potrebbe facilmente indurre taluno a credere, che le teſte non foſſero loro reciſe a dovere, e queſta credenza preſſo la maggior parte potrebbe ancora facilmente prenderſi in luogo d'indubitata certezza. Tutto queſto però trovaſi intieramente diſſipato, e tolto dalla più ſcrupoloſa notomia: mentre nelle teſte reciſe veggonſi oltre le quattro corna le mandibole, i denti, la lingua con le ſue appendici, i nervi tutti, i muſcoli, le briglie: oltre l' eſtremità dell' eſofago, dei dutti ſalivali, del prepuzio, e della vagina per modo, che non rimane alcun dubbio che il capo non ſia ſtato intieramente reciſo.

Le lumache, delle quali ſino a qui parlato abbiamo, e particolarmente le decapitate, e quelle ancora, che dopo la decapitazione ſi ſtraſcicavano, contraendoſi tutte ſi ritirano nella propria portatile abitazione, ed ivi tutto che ſenza capo ſi ritirano, riſacendo all' ingroſſo quel bianco tenace coperchio, che è un prodotto del viſchioſo umore, che gemono, mercè del quale ſoglionſi dalle eſterne ingiurie naturalmente diſendere. Queſta ſituazione però quanto è comoda per loro e vantaggioſa, altrettanto viene ad eſſere incomoda all' oſſervatore, che vorrebbe vederle di tratto in tratto uſcire per eſaminarne con diligenza i riſultati. Per ottener ciò, ho proccurato, per quanto mi fu mai poſſibile, di non aggiungere all' ampia piaga e profonda, che hanno, ulterior ſtimolo, come quello di rompere poſteriormente il guſcio, e talvolta ancora, ſe ad uſcire ſono ritroſe, di punzecchiarle, il che ſe non venga fatto da mano maeſtra ed a ſimili eſperienze avvezza, avviene di frequente che quelle appunto, che furono così ſtimolate, inſelicemente ſen muojano. Per ottener dunque l' intento e ſenza nocumento alcuno, io proccurai d' invitarvele, e farle uſcire ſpontaneamente, come in fatto mi avvenne, o col riporle nell' acqua tepida, oppure coll' eſporle alle dolci pioggie di primavera e d' eſtate, nelle quali ſogliono naturalmente all' aria aperta produrſi.

Tenendo

Tenendo adunque questo metodo, nulla mi è avvenuto di osservare di nuovo dopo dieci, quindici, ed anche venti giorni, e soltanto il più delle volte dopo un mese osservai in quelle, che avevano interamente recise, o dimezzate le corna maggiori, al luogo dell' amputazione alzarsi un picciolo globo, il quale in progresso di tempo facendosi maggiore, mostrava nel centro un punto nereggiante, il quale corrispondeva perfettamente a quello, che si osserva naturalmente nell' estremità delle corna maggiori; quindi allungandosi in seguito, a capo di due mesi, e più frequentemente di tre, ho veduto rifatte le corna maggiori e le minori ancora.

Queste corna rifatte non hanno da principio il loro color naturale, ma sono d'un bianco pallido, ed hanno la cute molto più dilicata di quella del capo medesimo; in progresso però riacquistano il lor colore primiero, e formano un tutto eguale per modo, che riesce difficilissimo anzi impossibile il distinguerle da quelle lumache, a cui le corna recise non furono. Che queste corna rifatte corrispondano interamente alle prime, ce lo mostra ad evidenza la notomia: e queste pure si distendono, si riconcentrano, e sono dotate della sensibilità medesima delle prime.

Come le corna, così si riproducono ancora e la coda ed il piede; anzi ho osservato particolarmente, che queste si riproducono con continuazione eguale di sostanza, e si perfezionano con maggiore brevità di tempo, che le corna medesime; e queste parti rinnovate sono esse pure di un bianco pallido, che presto si perde, non rimanendo più vestigio dell' amputazione seguita.

Quello che abbiamo osservato delle corna, della coda, e del piede, lo abbiamo veduto ancora del capo, con questa differenza però, che talvolta nel luogo dell' amputazione dopo un mese o circa questo tempo si vede nel centro spuntare un picciolo globo di frequente irregolare; talvolta si scorge da un lato, tal altra invece di uno ne compariscono due, cioè uno per ciascun lato, il prodotto dei quali non è sempre corrispondente tra loro: mentre da quello di mezzo ho quasi sempre veduto dopo due, tre, talvolta quattro mesi riprodursi perfettamente la testa, e così dei due laterali congiungendosi insieme, ma dal solo laterale ho quasi sempre ve-

duto ſeguirne una produzione irregolare, mentre facendoſi maggiore, ſpunta d' ordinario nell' eſtremità un ſolo corno, e per lo più il maggiore, il quale allungandoſi ſupera in lunghezza e groſſezza le corna naturali, ſebben però abbia l' organizzazione medeſima delle corna primiere. Parecchie lumache ſi conſervano in queſto ſtato, e ne ho preſentemente ancora vive e vegete dopo un anno, che in nulla hanno cambiata queſta loro irregolar produzione.

La rinnovazion della teſta corriſponde alle parti, che abbiamo di ſopra deſcritte. La cute di queſta non è da principio così ſagrinata come la naturale, ma più liſcia e più eguale, ed è pur eſſa d' un colore men carico, cenericcio, e così dalla vecchia cute diſtinto, che ſembra con iſtupore che al vecchio collo ſia un nuovo capo applicato, e congiunto. Molti de' miei amici con ſorpreſa videro queſte nuove riproduzioni, e voi pur le vedeſte in compagnia dell' erudito e celebre comune noſtro amico Sig. Angelo *Mazza*, quando foſte nel paſſato autunno gentilmente a favorirmi. Queſta varietà di colore, che ſi protrae oltre lo ſpazio di più meſi, ſi cangia poſcia, nè altro veſtigio rimane tra la rifatta e vecchia cute ſe non ſe un tenue leggiero ſolco al luogo dell' amputazione, il quale pure col tempo ſvaniſce.

Che le teſte rifatte corriſpondano interamente alle prime, lo moſtra la notomia, poichè in eſſe ivi ſi veggono tutte quelle parti, che abbiamo di ſopra deſcritte. E ciò, che accreſce ancora nel rinnovamento di queſte parti la meraviglia, ſi è, che, ſe non vi foſſe quella diſtinzione di colore tra la cute del collo e quella del capo, tutte le parti interne così ſono fra loro continuate, eguali, e corriſpondenti per il colore, ſoſtanza, e ſimmetria, che impoſſibile aſſolutamente ſarebbe il diſtinguere le riprodotte da quelle, che mutilate non furono.

Appena rifatte le teſte cercano toſto le lumache di riparare il lungo forzato digiuno, e ſanno uſo delle rifatte lor parti in quella maniera medeſima, che il facevano da principio. Erano li primi d' Ottobre dell' anno paſſato, allora quando col beneficio d' una tenuiſſima pioggia ſtava io riguardando queſti rettili, che tutti uſciti dal guſcio facevano di sè vaga moſtra all' oſſervatore. Era in mia compagnia uno

di quegli uomini, che per natura loro ſono portati a creder poco, e niente poi di quello che ſente del meraviglioſo. Egli dunque non ſolo dovette confeſſare, dal confronto di altre naturali lumache, che quelle avevano una teſta riprodotta, tutto che foſſe a queſto contrario; ma oſſervò meco una di queſte, la quale volta la ſua rinnovata teſta all' insù ſtava affaticandoſi per afferrare coll' avanzato dente una briccia di cruſca, che al ſuo guſcio era in parte attaccata ed in luogo incomodo ancora coſtituita; ed in que' ſuoi rinnovati sforzi quanto mai fu piacevole l' oſſervare le replicate azioni e reazioni dell' aperta bocca, dei molli labbri, della lingua e del dente, che in mille modi volteggiando quel bricciolino, tanto fece, che infine gli riuſcì di ſtaccarlo, e di farſene un ben ghiotto ed aſſaporito boccone.

Queſto mirabile rinnovamento del capo non avviene però in tutte le lumache, e molto meno in quelle maggiori, che corriſpondono in grandezza ai martinacci di Firenze, nè d' ordinario in quelle picciole, che diconſi giardiniere, e veggiamo particolarmente negli orti a varj grazioſi colori ſegnate e diſtinte. Quelle, che da me furono con proſpero evento cimentate, ſono l' *Helix Pomatia*, *Itala*, *Zonaria*, *nemoralis*, *lucorum*. Di trecento però e più di queſte lumache da me in varj tempi decapitate, altre ſi conſervano tuttora, quali ſenza riproduzione alcuna, e quali con produzione imperfetta ed irregolare, ed altre infine rifecero perfettamente la teſta. Di quelle che morirono, furono in maſſima parte quelle da me ſegnate particolarmente, alle quali o l' amputazione non era ſeguita a dovere, oppur quelle che furono decapitate quaſi quattro linee dietro le corna maggiori, e per conſeguenza quelle, alle quali oltre il capo aveva reciſo porzione dell' arneſe maſchile, dell' appendice dell' utero, e dell' utero medeſimo. Quelle poi, che conſervanſi ſenza riproduzione alcuna oppure imperfetta, tali ſi veggono ancora, forſe perchè eſſendo di età troppo avanzata, mancano le di loro fibre della neceſſaria mollezza, fleſſibilità e vigoría, e però troppo rigide non poſſono ſtenderſi, e conformarſi a dovere, onde riprodurre perfettamente le parti amputate.

Gli accidenti tutti, che ho fin qui notati, furono da me quaſi per egual maniera riſcontrati tanto nelle lumache reg-

giane che nelle parmigiane, talchè in questo nulla mi è avvenuto di vedere, che meritasse una particolar considerazione, il che prova, che quando l'esperienze sono esatte, le lumache della medesima spezie danno per tutto i prodotti medesimi.

Ma è ormai tempo, che dia fine a questa lunga lettera, la quale certo avrà sorpassati i limiti della vostra pazienza. Raccogliendo quanto vi ho scritto, voi non vedrete che una conferma di quanto voi avete diligentemente avanzato nel vostro *Prodromo*, cioè che le lumache hanno la proprietà di rifare le parti mutilate, vale dire le corna, il piede, la coda, e la testa. Le osservazioni quando sono esatte, e vengono da un Filosofo, quale voi siete, che in queste materie

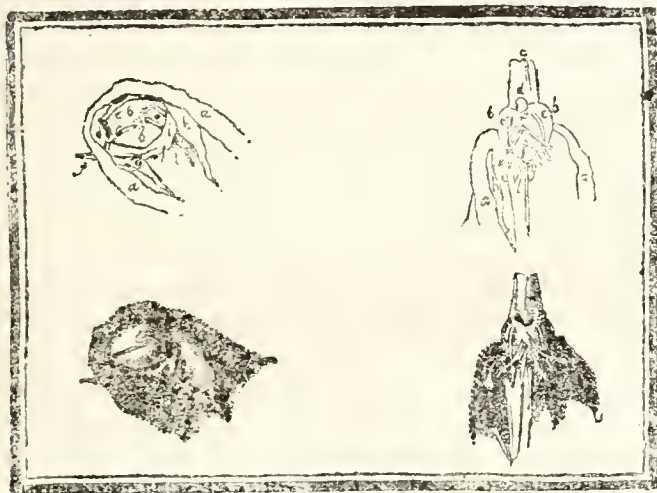
Siete maestro di color che sanno,

usando delle debite circospezioni, da per tutto e facilmente si devono riscontrare, e si riscontrano verissime. Io vi mando queste osservazioni, non perchè meritino di venire da voi, conosco la loro pochezza, e veggio ciò, che lor converrebbe, ma perchè richieste da voi, e perchè veggiate quanto il compiacervi mi stia a cuore, onde abbiate certo argomento, che nulla più desiderar posso, quanto il farvi conoscere, che sono con particolar stima ed amicizia vostro ecc.

FIGURA I.

aa La pelle sagrinata.
bb Il globo ovale.
cc Le briglie superiori.
d La bocca ed i denti.
ee L'esofago, ai cui lati si veggono i dutti salivali.
f Il corno maggiore.
g Il suo muscolo.
h L'organo genitale.
i Il cervello, e
l La gamba sinistra di questo.

FIGURA II.

aa La pelle.
bb Il globo ovale roveſciato innanzi.
cc Il muſcolo retrattore del globo medeſimo.
d Globoſa appendice della lingua.
ee Le briglie inferiori lunghe.
f Le brevi.
g Le breviſſime.
h Il muſcolo del corno maggiore.
i Il muſcolo del corno minore.
l Il muſcolo mandibulare.

ARTICOLO III.

Rifleſſioni.

Per la numeroſa ſerie dei fatti nel ſecondo Articolo addotti, avranno di leggieri conoſciuto gl' imparziali lettori, che quando io il primo tra Naturaliſti annunziai al pubblico nel mio *Prodromo* la rinnovazione del capo nelle lumache decapitate, e quando queſta rinnovazione è ſtata da me amplamen-

te confermata nella prima Memoria, io non ho fatto che render palese al Mondo fisico una incontrastabile verità per lo innanzi non conosciuta: e quindi si saranno facilmente accorti, che hanno avuto il torto gli Autori nel primo Articolo rammemorati, allorchè con le loro esperienze si sono affidati di solidamente combatter le mie. Ciò non pertanto questa medesima verità non può che acquistar forza maggiore, e farsi più convincente, più persuasiva, nell'animo eziandio di quelli che stati sono per l' addietro i meno disposti a riceverla, se rileggendo le tracce delle osservazioni, e sperienze così favorevoli, che contrarie, vorremo accompagnarle da alcuni brevi riflessi, la qual cosa ho io deliberato di fare nel presente Articolo.

Diamo cominciamento dalle favorevoli. Ma ad intelligenza, e a persuasione maggiore di quanto io sono per dire, non sarà disutile di ricordar brevemente al lettore quanto da noi è stato osservato nella prima Memoria intorno alle parti, che compongono l' intiera testa delle lumache, e al sito preciso, dove in esse far si dee il taglio, per andar sicuri di averla tutta quanta recisa. Oltre adunque alle quattro corna, quivi si è detto che la loro testa esteriormente considerata risulta de' proprj integumenti fatti a sagrino, di due labbra, e di due mandibole. Se poi dall' esterno passeremo all' interno, la troviam composta d'una picciola lingua, di un dente semilunare di sostanza quasi cornea, impiantato nella mandibola superiore, di una porzione d'esofago, e del cervello diviso in due lobi. Le corna maggiori poi si veggono alla sommità fornite del nereggiante loro occhio, del loro nervo ottico, e de' movitori loro muscoli. Quanto poi al sito dove facendo l' amputazione siam certi di aver troncata l' intiera testa, si è mostrato che un tal sito è al di là della radice delle corna maggiori per l' intervallo d' una linea all' incirca, siccome lo fa vedere la notomia. Ciò premesso scendiamo ad esaminar di volo i fatti comprovanti questa riproduzione, dal qual esame apparirà sempre più non solo esser vane e ridevoli le opposizioni di quelli che ricusan di ammettere il rifacimento di qualunque parte del capo, come sono stati d' avviso i Signori *Wartel*, *Cotte*, *Bomare*, *Schröter*, e *Argenville*, ma l' altre eziandio, per cui si argomentano i Signori *Mur-*

ray, *Adanſon*, e *Preſciani* di poter negare la riparazione dell' intiera teſta, quantunque accordino la riparazione di qualche parte.

E per cominciare dal Sig. *Roos* (per ſeguir l' ordine nel nominar queſti Autori che ſi è tenuto nel ſecondo Articolo) oltre a due lumache, l' una delle quali avea già rimeſſe le corna maggiori, e l' altra le quattro corna, e la bocca, ei dice formalmente che una terza lumaca, alla quale era ſtata tagliata la teſta alla radice delle corna, ne aveva acquiſtata una nuova, unitamente alle quattro corna pur nuove. Se adunque in queſt' ultima lumaca era ſtato operato il taglio alla radice delle corna, chi non vede che la teſta riprodotta doveva già eſſer munita, tra l' altre appartenenze, ſe non d' un nuovo cervello, d' una porzione almeno di eſofago, delle labbra, del dente, delle mandibole, della lingua?

Ma le lumache del Sig. *Lavoiſier*, una delle quali con la nuova teſta ſomigliantiſſima alla vecchia fece egli vedere alla Reale Accademia di Parigi, oltre al rifacimento delle mentovate parti, dovevano avere rigenerato il cervello, per averne fatta l' amputazione al di là delle quattro corna. E la ſaggia maniera, con cui queſto celeberrimo Accademico deſcrive i principj, e gli avanzamenti di tale riproduzione, e l' autorevoliſſima teſtimonianza di così illuſtre e riſpettabile Ceto conciliano pieniſſima fede alla narrazione de' ſuoi tentativi.

Non meno deciſive ſul riſacimento dell' intiera teſta, e non meno giudizioſe ſono l' eſperienze regiſtrate negli Atti della prelodata Accademia, che furono inſtituite da' Signori *Turgot*, *Tenon*, ed *Heriſſant*. Quivi eſpreſſamente ſi avverte che ad alcune delle lumache mutilate fu interamente troncata la teſta, e ſi paſſa in ſeguito a deſcrivere il naſcimento, oſſia lo ſviluppo di una teſta novella, la quale arrivata al convenevole ingrandimento laſcia vedere tra le altre parti il riprodotto dente ſemilunare.

Con le eſperienze di queſti Accademici di Parigi conſuonano mirabilmente quelle del *Müller*. E quando io nomino il *Müller*, intendo di ragionare di uno de' primi Naturaliſti della Germania. E quella diligenza, ſagacità, e oculatezza, che oltre al raro ſuo ſapere caratterizza le rinnomate ſue Opere, ſi

distingue altresì nella sensata sua Memoria su le lumache. E di quanto io dico facilmente converranno i lettori da que' saggi avvertimenti, che precedono la citata Memoria, l' uno de' quali si è, che per accertarsi il Tedesco Naturalista di avere decapitate a dovere le sue lumache, dopo l' amputazione esaminò ad occhio nudo, e alla lente la testa già spiccata dall' animale, e vi osservò, e vi fece osservare a più intelligenti le parti principali che la compongono, come le quattro corna, gli occhi, la bocca, le labbra, le mascelle, ecc. Quantunque poi diverse di queste lumache non riproducessero, o riproducessero male, altre però riprodusser benissimo, rifabbricando compiutamente quelle parti stesse, che avevan perdute, il che basta all' intento.

Si è pur veduto che alla presenza di molti Professori di Medicina, e di Fisica è stata fatta l' amputazione non poco al di là delle corna maggiori dal Padre *Scarella*, celebre Matematico, e dotto Fisico, la cui morte da alcuni anni seguíta non lascia Brescia di piangere, di cui era uno de' principali ornamenti: e che l' operazione per mezzo di due nuove e taglientissime forbici si faceva prestamente, e in un colpo solo non dando così tempo alle lumache di ritirarsi. Non ostante però la piena sicurezza di aver troncata la testa, e di averla per intiero troncata, per essersi fatto il taglio molto al di là delle corna maggiori, si è questa rifabbricata, in quali più, e in quali meno; e tra queste una lumaca l' aveva così compiutamente rifatta, che a riserva del colore, e della mollezza, non era distinguibile la testa nuova dalla vecchia. E una simile compiuta riproduzione si ebbe altresì da una lumaca decapitata dal valente Anatomico, e Fisiologo, Sig. Dottore *Pusini*, che fu pur veduta, e ammirata dal mentovato chiarissimo Padre.

Il Sig. *Schaeffer* di Ratisbona, il cui solo nome presso i Naturalisti vale per il più splendido elogio, non avvisa nella lettera a me scritta, nè tampoco nel picciolo estratto che la accompagna, dove abbia precisamente fatto il taglio alle sue lumache. Per saper ciò bisognerebbe consultare le sue Dissertazioni in tedesco relative a tale soggetto, le quali io non ho vedute. Ciò non pertanto l' avermi egli formalmente detto, che *le sue sperienze e osservazioni hanno verificato pienamente*

mente le mie, e il saperſi che tali oſſervazioni, e ſperienze partono da un Fiſico sì addeſtrato nella difficil arte di ſperimentare, e sì eſercitato e sì grande nello ſtudio de' minuti animali, ſono preſunzioni troppo forti per credere ch' egli abbia veramente reciſa quella parte anteriore di corpo, che conſtituiſce l'intiera teſta, e che quindi ottenuto ne abbia veracemente una novella, non già una porzione, oppure una ſoprapelle, un invoglio.

Avverte queſto illuſtre Naturaliſta di avere *fors' anche ſpinta alcun poco più in là di me la ſua curioſità*: e vuole probabilmente alludere a quanto ſi accenna nell' eſtratto indicato, cioè che egli *ha veduto coſtantemente rinaſcere non ſolamente le teſte, ma le code eziandio, che loro aveva tagliate*. E certamente dal non avere il Sig. *Schaeffer* avuto altra notizia de' miei tentativi, a quel ch' io mi ſappia, che da' pubblici fogli (almen quando ſperimentò egli) ne' quali fogli non ſi facea che annunziare la ſola riproduzione del capo, aveva egli tutta la ragione di dir queſto. Il vero è però che oltre l'avere io veduto il rifacimento del capo, ho altresì veduto l'altro di quella parte, che alcuni chiamano *coda*, e che è l'eſtremità poſteriore del piede della lumaca; anzi ho io ottenuto il riproducimento di tutto il piede, oſſia di quella porzione del corpo, a cui appoggiaſi l' animale quando ſi ſtraſcica: e queſto in termini formali lo dico alla pag. 70 del *Prodromo*, e lo ripeto poi nella prima Memoria. Godo pertanto di veder anche confermata queſt' altra mia oſſervazione, nè ſolamente dal Sig. *Schaeffer*, ma da altro Naturaliſta non men valente di lui, nè men celebre, quale ſi è il Sig. *Lavoiſier*, che come ſi è veduto nel ſecondo Articolo ha conſeguito egli pure il riproducimento della medeſima parte.

A diverſe delle lumache, di cui ragiona il Sig. Abate *Troilo* (per paſſare alle ſperienze di queſto dotto Fiſico) oltre alla teſta venne levata qualche porzione di collo. Nè fu punto a ſtupire ſe tutte perirono: che anzi fu piuttoſto a maravigliare che alcune prima di laſciar di vivere deſſero fuora un principio di riproduzione. Per l' oppoſito non poche di quell' altre, che ſotto il tagliente metallo laſciarono l' intiera teſta, e non più, la rifecero pur intiera: e una delle prove deciſive, che gli organi che la compongono ſi erano rifatti, fu

che queste lumache fecero uso della bocca, e dei denti col prender cibo.

La medesima pruova su data altresì da una delle lumache decollate dal Sig. *Senebier*, cioè a dire da quell' illustre Ginevrino che ci ha dato un eccellente Trattato intorno all' *Arte dell' osservare*, e che ha poi avvalorato il precetto con l' esempio, arricchendo la Fisica d' ottime produzioni sperimentali, e recentemente di bellissime, e sensatissime Memorie *su l' Influenza della luce solare nel modificar gli esseri dei tre Regni della Natura*. Sebbene il cibarsi di questa lumaca non fu il solo argomento, onde inferì il Sig. *Senebier* che rifatta aveva compiutamente la testa. Lo riconobbe anche a chiarissime note dall' esser ritornato il suo testaceo a quello stato di perfezione, in cui era prima d' essere decollato. Che poi fosse stata veracemente levata la testa così in quella lumaca, che in altre diverse che la restaurarono più o meno, non vi poteva cadere il più picciolo dubbio, per aver egli notomizzate le teste recise, e per aver confrontate le parti che le compongono con la notomia delle lumache datane dall' immortale *Swammerdamio*.

Non era neppure da pensarsi che le sperienze del compatriotta del Sig. *Senebier*, cioè a dire d' un *Bonnet*, le cui Opere pubblicate fanno le delizie, e l' ammirazione del secolo, non fossero convincentissime. Quante cautele non adoperò egli perchè l' operazione del taglio fosse fuori del dardo degli avversarj! Quanta oculatezza non usò per accertarsi di avere interamente tronca la testa! Quale assiduità, quale studio, quale diligenza nell' osservare minutamente i fenomeni delle teste riproducentisi! Con quanta evidenza non dimostra egli il rifacimento dell' intiero capo in qualche lumaca! Con quale imparzialità non ci dice egli che altre hanno riprodotto male, altre non hanno riprodotto di sorta, altre anzi che riprodurre sono perite! Sebbene queste importanti verità verranno gustate grandemente di più dal lettore, se vorrà consultare le Memorie stesse del nostro Filosofo, conoscendo io troppo bene, che l' estratto per me abbozzato non tramanda di esse che un languidissimo e smorto parelio.

Rimarrebbe ora a parlare delle tre lettere de' Signori *Caldani*, *Pratolongo*, e *Girardi*, che gentilmente si sono com-

piaciuti di favorirmi, e per le quali io debbo professar loro la mia più rispettosa e più viva riconoscenza, facendo vedere come anche da queste lettere rimanga nel più rigoroso modo comprovata la riproduzione di tutta la testa, se non riflettessi che trovandosi esse nella presente Memoria pubblicate come mi sono state trasmesse da' loro chiarissimi Autori, i conoscitori leggendole per intiero ne comprenderanno meglio la forza, e ne rimarranno quindi più persuasi, e convinti. Piuttosto io mi tratterrò per poco sopra alcuni luoghi di queste lettere concernenti certi fatti, che per la presente materia non sarà che bene di mettere in chiaro.

Il Sig. Professore *Caldani* sul finir della lettera tocca due leggieri divarj tra la testa nuova e la vecchia. Il primo è che le rispondenti corna novelle non sono talvolta eguali fra loro in lunghezza, e in grossezza.

Cotal fenomeno ho io altresì qualche volta osservato, ed entra nel novero di quelle diverse anomalie o mostrosità da me divisate in più luoghi di questo scritto, e che di nuovo mi converrà di toccare più sotto.

L' altro divario risguarda la mancanza di quel sagrino su la pelle della testa novella, il quale si osserva sempre su la pelle della testa vecchia. La stessa cosa è pure stata notata dal Sig. *Lavoisier* (*a*). Quest' ultima differenza però non è di durata, siccome lo è talvolta la disuguaglianza delle corna; ma da lunga esperienza ho potuto conoscere, che a poco a poco svanisce, e da ultimo si fa nulla. Vo dunque dire che se le lumache, che hanno rifatto il capo, seguiranno a vivere per più mesi, insensibilmente la pelle perde quel liscio, e quel fino che aveva, e tutta vestesi del suo sagrino, da prima non visibile che alla lente, ma visibilissimo in seguito all' occhio nudo. Così il nuovo, considerato anche esternamente, rendesi in fine similissimo al vecchio (in molti individui almeno) senza eccettuarne il colore, il quale di bianchiccio o cenerognolo che era nella nascente riproduzione, diventa oscuro allorchè questa si è pienamente perfezionata.

(*a*) Art. II.

La ſerie di queſte faſi, di queſti cangiamenti nell'eſterno de' noſtri rettili mutilati, da me avvertita così nel *Prodromo*, che nella prima Memoria, io la veggo pur confermata dalla Reale Accademia di Parigi, e dalla lettera dell' Anatomico di Parma.

Il celebre Sig. *Caldani* prima di terminar la ſua lettera dice, che delle lumache da lui decollate non gliene reſtavano più in vita che quattro li 27 Settembre 1782. Ora è opportuno a ſaperſi, che di quelle quattro una rifece beniſſimo il capo. Così egli mi ſignifica con ſua lettera de' 19 Aprile 1783. " Delle quattro lumache che mi rimaſero, nel paſſa-„ to freddo me ne morirono tre. La quarta, che era la più „ grande di tutte, mi moſtrò, quattro giorni ſono, una bel-„ liſſima teſta „.

Nel *Prodromo* favellando io delle anomalie, che non infrequentemente ſi ſcorgono ne' capi rigenerati, e che ſono ſtate poi confermate dalla più parte di quelli che parlano con eſito felice di queſte riproduzioni, cerco quale eſſer poſſa la cagion ſiſica di così fatte anomalie. Ed avendo io allora qualche ſoſpetto ch' eſſa proveniſſe dal taglio più o meno avanzato, più o meno obbliquo, accenno queſta cagione, ſenza però ammetterla, nè rigettarla. Tali ſoſpetti per ulteriori tentativi eſſendo in me creſciuti, mi hanno poi indotto a dire con maggiore animo, o almeno con minor timore nella prima Memoria, che l' obbliquità del taglio, o il maggiore o minore avanzamento di queſto influiſce forſe nel produrre ſomiglianti moſtroſità.

La diligenza, e la ſagacità del Sig. *Pratolongo* ſi è eſercitata intorno a queſta curioſa ricerca, come appariſce da alcune eſperienze riferite nella ſua lettera, le quali non combinano troppo co' miei ſoſpetti. Confeſſa però eſſere troppo poche per decidere; e quindi ſoſpendendo egli il ſuo giudizio, rimette la ricerca a una ſerie novella di eſperienze, di cui non racconta l'eſito, per non avere ancor riprodotto le lumache mutilate quando ſcriſſe la lettera. Nè io in ſeguito ho ſaputo quali ſieno ſtati i riſultati di queſte nuove eſperienze. Mi convien però dire che nella ſuddetta mia Memoria, ſtampata aſſai prima ch' io riceveſſi la ſua lettera, oltre al ſoſpettare che l'accennata condizione del taglio concorrer poteſſe al

producimento di quelle mostrosità, perchè molti e replicati fatti me lo facevano credere, io adduco un' altra cagione, che mi è paruta ella pure produrre talvolta il medesimo effetto; voglio dire se per fare l' operazione ci serviamo d' uno stromento, che, per non essere affilato come conviene, recida male nè ad un colpo solo la testa,

Il Sig. *Girardi* dopo me osserva, che nel momento che si taglia un corno alla lumaca, segnatamente uno de' maggiori, schizza un picciolo zampillo di umore ceruleo. Egli ed io spieghiamo il fenomeno, ma discordiamo nella spiegazione. Io opino che un tal umore covi prima ne' corpi glandolosi delle corna rotti allora dalle forbici o dal coltello *(Mem. cit.)*. Egli vuol per l' opposito, che sia il sangue dell' animale o un fluido analogo che esca con empito da' suoi vasi nel momento che si tronca il corno. Esaminata meglio la cosa, a me sembra ch' egli abbia ragione, ed io il torto. Che dentro di fatti alle corna maggiori scorra un vaso insigne inoltrantesi anche per qualche tratto sul capo, e ripieno di quell' umore leggermente ceruleo, ella è cosa da non mettersi in dubbio. Ma è pure egualmente certo, che recise le corna, quel vaso appassisce, e quasi dileguasi, per esserne uscito l' umore, che in grazia del colore ceruleo lo rendeva visibile.

Prima di uscire di queste lettere mi rimane a parlar d' una cosa, che ha qualche rapporto con le riproduzioni, temendo io che l' ommetterla non potesse creare qualche confusione nell' animo de' miei lettori. Il sommo Naturalista *Swammerdamio* ci ha lasciata un' eccellente descrizione anatomica dei nervi delle lumache, tanto di quelli che dal cervello si diramano dentro del corpo, quanto degli altri che si propagano al capo. Io cotesti nervi ne' miei esami su le lumache ve gli ho trovati appuntino, e mi si è aperta l' occasion di parlarne così nel *Prodromo*, che nella mia prima Memoria. Ma il Sig. Dottore *Girardi* nella citata sua lettera ha spinto più in là dell' Olandese Anatomico le sue ricerche, col darci una storia dei nervi, segnatamente di quei della testa, più circonstanziata, e più ampla. Quivi ognuno può scorgere quanto brilla la sua sagacità, la sua industria. I nervi adunque, che in sì gran numero si rinnovano nelle teste rifatte, rendono sempre più maravigliose coteste riproduzioni. Ma se la pre-

ſenza de' nervi nei noſtri rettili è una verità di fatto, una verità palpabile, come dunque ſuſſiſte ciò che ha ſcritto ultimamente un chiariſſimo Autore, il qual nega aſſolutamente che le lumache abbian nervi, anzi vuole che ne ſian privi i teſtacei tutti? Così egli c' inſegna in un ſuo libro di Nomenclatura, intitolato: *Introductio ad Hiſtoriam Naturalem ſiſtens Genera Lapidum, Plantarum, & Animalium* ecc. (*Pragæ* 1777); nel qual libro favellando dei teſtacei ha queſte formali parole, *nullis nervis inſtructa*. Quelli adunque che ſi abbatteſſero a leggere la mia Memoria, e l' indicata Nomenclatura, ſi troverebbero in qualche confuſione, perchè poſti fra due contrarie autorità, l' una che ammette i nervi nelle lumache, l' altra che affatto gli eſclude. Vero è che la ſeconda non fa che negarli; tuttavia sì fatta negazione pareva non doveſſe traſcurarſi, per venire da un Uomo che ha celebrità, e che per le molte ſue cognizioni ſinceramente io ſtimo. Qui adunque per levar d' imbarazzo i miei lettori, e dirò anche me ſteſſo, non vidi miglior partito, che il conſultare l' Autor medeſimo, dal quale inteſi con ineſplicabile mio ſtupore, non ſolamente ch' egli non aveva mai fatto oſſervazioni ſu l' interno delle lumache, ma che neppure avea letto lo *Swammerdamio*; e che intanto negava i nervi, in quanto che dal Principe dei Nomenclatori riponendoſi le lumache fra i vermi, a lui era paruto che non foſſero degne di averli.

Termino di favellare delle ſperienze del Sig. *Girardi* col riferirne una ſua recentiſſima. Nel meſe di Novembre del proſſimo ſcaduto anno 1783, eſſendo io paſſato per Parma, ed avendo quivi avuto il piacere di riabbracciare in ſua caſa queſto mio pregiatiſſimo Amico, egli mi fece oſſervare alcune lumache tuttora viventi, ma chiuſe ne' loro nicchj, da lui mutilate in guiſa la ſcorſa primavera, che la ſezione oltrepaſſati aveva di molto i confini del capo. Eſſendo io in ſeguito ſtato voglioſo di ſaperne l' eſito, lo pregai ſul finire del ſuddetto anno a volermelo partecipare; ed egli ſi compiacque di farlo col ſeguente Articolo di lettera che qui traſcrivo, parendomi affatto intereſſante, giacchè da eſſo raccoglieſi, che talvolta i noſtri teſtacei ſanno riprodurre, malgrado la mutilazione di una porzione del corpo aſſai ſuperiore a quella dell' intiera teſta.

„ Le lumache da voi vedute furono da me decapitate li
„ 11 Maggio dell' anno fcorfo quattro buone linee dietro le
„ corna maggiori , e nell' efame del capo recifo non folo vi
„ erano i mufcoli , e nervi tutti unitamente al globo ovale,
„ ai dutti falivali, al cervello , ecc., ma dietro a quefti tut-
„ ta la porzion groffa anteriore dell' arnefe mafchile , e più
„ della metà dell' appendice dell' utero contenente il propor-
„ zionato angolare ovarino , per modo che a me fembrava
„ impoffibile che quefti rettili poteffero novamente riprodur-
„ re le parti amputate . Ho voluto vedere in quefti paffati
„ giorni che foffe avvenuto di quefte infelici; e con mia for-
„ prefa una di quelle fegnate con lettera *O*, nelle quali il ta-
„ glio era ftato anche un poco più ingordo, l' ho veduta u-
„ fcire, dopo di averla tenuta per lungo tempo ftretta in ma-
„ no, e dopo una lunga immerfione nell' acqua tepida, pro-
„ ducendo innanzi il fuo lungo collo, in capo al quale fcor-
„ gevanfi manifeftamente i principj dei due corni maggiori ,
„ al di fotto dei quali comparivano i labbri, e la bocca; ef-
„ fendo la cute che copriva tutta la parte anterior riprodot-
„ ta d' un cenerino molto più aperto e chiaro di quello che
„ fi offerva d' ordinario nelle parti novellamente riprodotte.
„ Dopo di avere per lungo tempo, non fenza particolar ftu-
„ pore, efaminata quefta lumaca, quafi incredulo ai fenfi miei
„ fui tentato di aprirla , per vedere internamente ancora la
„ riproduzione delle parti amputate; ma ficcome le efteriori
„ non erano ancora perfettamente riprodotte, così penfai di
„ trafportare a tempo più opportuno quefta nuova infpezione,
„ per appagare con maggior fondamento la mia curiofità .
„ Quindi con gelofia tutt' ora nel mio Gabinetto, e nel ce-
„ ftino medefimo, ove voi le vedefte, la fto confervando per
„ vederne in progreffo che farà perfezionata efternamente che
„ fia „.

Parma li 13 Gennajo 1784.

Efaminati tanto che bafta i fatti più principali, e più importanti dei rammemorati chiariffimi Sperimentatori, per cui rimane confermata nella maniera la più irrefragabile la mia fcoperta , ragion vuole che ora paffiamo ad efaminar quelli

per cui si è cercato d' impugnarla, che è ciò che in secondo luogo proposto mi era di fare nel presente Articolo. Nelle mie diverse ricerche Fisiche essendo stato talvolta necessitato a confutare qualche errore degli altri, o a mostrar qualche sbaglio, ho proccurato, quando ho potuto, di farlo in modo che nel tempo stesso apparisse come erano nati cotesti errori, cotesti sbagli, e ciò che far dovevasi per non commetterli, trovato avendo un tal metodo opportunissimo per dilucidare sempre più il vero; e di questo metodo cercherò pur di valermi presentemente. Io non so se così adoperando potrò acquistare la grazia de' Signori Contraddittori; tuttavia proponendomi di parlare d'ognuno con la dovuta stima, e rispetto, vorrei lusingarmi almeno che non se ne dovessero offendere, a quel modo che io non sono restato punto offeso, quando hanno cercato d' impugnarmi, e di far apparire che mi era ingannato, non ostante che la ragione militasse a mio favore, ed essi avessero il torto.

Il Sig. *Wartel* che fu il primo, per quanto a me costa, a far note al pubblico le sue sperienze contrarie alle mie, non crede possibile la riproduzione nelle lumache, per non avere ottenuto il rifacimento delle corna, nè del capo nelle mutilate da lui su la fine di Ottobre del 1767, ed esaminate nel mese di Maggio del 1768.

Prego questo saggio Religioso a volermi permettere qualche considerazione su l' accennato tentativo. Quando io ho detto che le lumache terrestri hanno il dono di riparare il capo reciso, io ho parlato di quelle che mi eran cognite, anzi neppur di tutte queste, ma di alcune specie soltanto, quali sono l' *helix lucorum*, la *pomatia*, e la *nemoralis*. Era io dunque ben lontano dal pretendere, che di tal prerogativa godessero tutte le specie comprese sotto questo genere di rettili sì prodigiosamente moltiplicati sul globo. Il Sig. *Wartel* non divisa punto la qualità di lumache da lui cimentata. Non poteva egli darsi che abbattuto si fosse in alcune di quelle che verosimilmente sono inette al riprodurre? Ed essendo così la cosa, qual maraviglia che gl' individui da lui mutilati sono sempre restati acefali?

Ma conceduto eziandio che le lumache da esso sperimentate fossero attissime al riprodurre, io dubito forte che questo Naturalista

Naturalista coll' averle decapitate in Ottobre, ed osservate in Maggio, abbia avuta più fretta a negare la nuova testa, che la Natura a rimetterla. La riproduzione negli animali non è in fine che una vera generazione; con questo solo non attendibil divario che nella generazione ordinaria nasce e sviluppasi un tutto organizzato, e nella riproduzione nasce e sviluppasi una parte soltanto di questo tutto. Quelle condizioni adunque che sono richieste al nascimento di un tutto, si richieggono al nascimento di una parte, e tra queste condizioni vi è il calore. Nell' uomo, ne' quadrupedi, e in più altri animali di sangue caldo nascono i feti a qualunque stagione, perchè questi maturano nel corpo della madre, dove trovano sempre un proporzionato calore. Gli uccelli possono altresì far nascere in inverno le loro uova, mediante il calore da esso loro somministrato. Non così accade agli animali di freddo temperamento, i quali non propagano, nè propagar possono la specie, che alla buona stagione; restando nel rimanente dell' anno compresi dal freddo in guisa, che volendo noi giudicare dall' esterne apparenze, li crederemmo più presto morti che vivi. Questo si osserva nella più parte degl' insetti, de' vermi, de' rettili, e tra questi ultimi si debbono noverar le lumache terrestri, le quali non si accoppiano, e non generano che in primavera, e durante tutto il verno si tengon sotterra immobili affatto, e in uno stato letargico, rinchiuse dentro alle calcari lor nicchie, di cui serrano esattamente l' apertura con quel loro coperchio formato dal vischioso glutine, che geme dal corpo di esse. Di più le medesime in quell' avversa stagione non solo non generano, ma quelle che giunte ancora non sono al necessario ingrandimento, ristanno allora dal crescere, e dallo svilupparsi di vantaggio, che anzi tutte quante sceman di volume, e di peso, come si fa chiaro osservandole quando in autunno si chiudon sotterra, e quando in primavera ne escono. E la ragione di tal decremento è troppo patente, mentre per l' una parte in tutto quel tempo non si cibano punto, e per l' altra la loro traspirazione non rimane affatto impedita. Se questi rettili adunque non generano, se restan letargici, se punto non crescono nell' intiera vernata, che è quanto a dire durante presso a poco tutto quel tempo che sono stati custoditi dal

Sig. *Wartel*, come ſi poteva egli aſpettare la riproduzione del capo? Di fatti non avviſo io forſe che per ottener queſta non vi vuol meno del grado decimo terzo del termometro reaumuriano, e che in conſeguenza non ogni ſtagione a queſto organico ſviluppo è idonea, ma la ſtate ſoltanto, e la primavera alquanto inoltrata? (*a*). Non rendo io forſe conſapevoli i lettori che, ſe la decollazione venga fatta all' avvicinarſi del verno, non comincia ad oſſervarſi un principio di riproduzione, che nel ſeguente Maggio? (*b*). E qui ſi rifletta ch' io parlo della noſtra Lombardia; per l' oppoſito nell' Arteſia dove il citato Autore ha fatto i ſuoi tentativi, e dove il freddo è aſſai maggiore, un tal principio non ſaraſſi paleſe che molto più tardi, come ſarebbe in Giugno. Se adunque il Sig. *Wartel* foſſe ſtato meglio iſtruito del tenore che tien la Natura nella generazione, e nell' accreſcimento de' noſtri rettili, anzi che decidere in primavera, differito avrebbe a farlo in eſtate, quando cioè ſuol manifeſtarſi coteſta riproduzione.

Ma dato eziandio che i meſi eſtivi ſtati non foſſero al riproducimento più favorevoli degl' invernali, aveva egli in virtù di quell' unica ſua eſperienza baſtevol motivo, onde giudicare impoſſibile coteſto fatto? Non ſi accorgeva che sì adoperando peccava contro la Logica? In effetto non poteva egli darſi che il buon eſito delle ſue eſperienze veniſſe impedito da qualche circoſtanza da lui non preveduta, maſſime per eſſer queſto il primo ſaggio ch' egli intrapreſe ſu queſti animali? Non dice la pagina 66 del mio *Prodromo* che in quelle ſpezie medeſime di lumache, che hanno virtù riproduttrice, ve n' ha alcune che a ciò ſono inette? Non poteva egli dunque darſi che il noſtro Sperimentatore abbattuto ſi foſſe in queſte ultime? Senza che la buona Filoſofia non c' inſegna ella che a ſtabilire una ſcoperta baſtano uno o due fatti, purchè ſieno bene avverati, nulla provando mille altri che in contrario ſorger poteſſero, per eſſere innumerabili gli accidenti che frappor ſi poſſono ad impedire la ricercata verità?

(*a*) Pref. cit. e Mem. I.
(*b*) Ivi.

Il Padre *Cotte*, Prete dell' Oratorio, si è esercitato molto più a lungo del Sig. *Wartel* su le lumache. Quest' ultimo dopo il riferito saggio non è più tornato, per quanto io sappia, a queste ricerche. Per l' opposito il primo per cinque anni seguiti, cioè dal 1769 fino al 1773 inclusivamente, ha continuato a sacrificar questi rettili alla Filosofia. Ma a quel modo che egli si è distinto nella moltiplicità degli esperimenti, avrei anche voluto che distinto si fosse nella maniera di saggiamente instituirli. Ma se debbo dirla com' io la sento, a me non sembra che in questa parte il chiarissimo Naturalista Francese dato abbia gran prove del suo valore. Veduto abbiamo nell' *Avant-coureur* che appena udite le mie osservazioni, fece egli con affilata forbice saltar per aria tante teste, quante lumache si abbattè di trovare. Lodo assaissimo la sua premura, il suo zelo nell' affrettarsi di cercar di avverare un fatto in apparenza sì paradosso. Ma non posso mica egualmente lodare il metodo da lui tenuto per conseguirne l' intento. Se qualor la lumaca è fuori del guscio, tutto quel che apparisce del suo corpo, non fosse altro che la testa di lei, era sicuro il Padre *Cotte* di non avventurar colpo di forbice senza far balzare in aria in tutto o in parte la testa. Ma occupando questa soltanto la porzione anteriore del corpo dentro a certi prefissi limiti, era un puro accidente se da qualcuno di que' colpi avventurati così senza legge, senza misura, veniva essa a recidersi precisamente. Un destro ed avveduto sperimentatore, e nel tempo stesso istruito nella Zootomia, sarebbe stato men premuroso di fare balzar tante teste, ma più assai di reciderle a dovere, voglio dir col tagliare questa parte e non altra del corpo, mirando a quel sito preciso col tagliente stromento, dove finisce la testa. Nè pago sarebbe stato di ciò, ma dopo il colpo avrebbe con attentissima diligenza esaminata la porzione dall' animale recisa, per assicurarsi se l' operazione era stata fatta come conveniva. Così hanno adoperato i *Bonnet*, i *Senebier*, i *Caldani*, i *Girardi*, i *Pratolongo*, i *Müller*, e pressochè tutti gli altri che si sono presi la pena di ripetere i miei tentativi: e mi permetterà il degnissimo Padre s' io gli dico che così pure doveva far egli: ed io non dubito punto che in grazia di tali om-

missioni nata ne sia quell' orribile carnificina senza il minimo avventuroso successo.

Ma in mezzo a quella immensità d' inutili tentativi ha egli almeno appreso dalle lumache un' astuzia, atta a deludere le crudeli mire degli sperimentatori, la quale astuzia non è lontano dal credere che m' abbia ingannato. Osserva egli adunque che la lumaca nell' istante che si sente ferire, si ritira precipitosamente dentro la casa: che però non di rado lo sperimentatore può credere di aver recisa la testa, quando non ha portato via che qualche pezzetto di pelle. Quindi gentilmente viene a redarguirmi, quasi che le lumache sieno state più accorte nel ritirare la testa, che io nel reciderla.

Che le lumache, quando sentono la viva azion del coltello o della forbice, faccian l' atto di ritirare il capo, questo è verissimo: ma che poi, adoperando le necessarie cautele, loro riesca di ritirarlo di fatti, questo è falsissimo. Se adunque lo stromento è bene affilato, la lumaca non ha tempo, nè può aver tempo di ricoverare la testa, ma bensì questa si trova già spiccata dal corpo, quando ritirasi l' animale dentro del guscio. E chiunque è capacissimo di eseguir bene questa operazione, purchè ad un colpo, e con celerità venga fatta. E di quanto io dico me ne appello a tutti quelli che hanno verificate le mie sperienze, ed a chiunque amasse verificarle di nuovo.

Ma voglio che siam liberali con questo Francese. Voglio che gli accordiamo che qualche volta a cagione o dello stromento poco tagliente, o della poca prestezza della mano nel dare il colpo, o per qualunque altro accidente la lumaca ne resti libera con la sola perdita della pelle del capo. Io qui dimando, quale sarà quel Fisico sì inesperto o sì disattento, che all' istante non s' avvegga dello sbaglio commesso? La testa di una lumaca, siccome replicatamente si è detto, non è mica una picciola cosa: ella è una macchinetta organica compostissima; e recisa che sia, oltre alle altre parti che vi discuopre la lente, saltano agli occhi le quattro corna, le labbra, la bocca, i denti, ecc. E come dunque sul momento non accorgersi se la porzione recisa contien queste parti, e in conseguenza se è la verace testa, oppure se non consi-

ſte che in quel ſolo ſuperficiale ſagrino, che è la pelle dell' animale?

Ma paſſiamo a far parola d' un altro de' miei oppoſitori, ſenza però uſcir della Francia, anzi di Parigi ſteſſo, rincreſcendomi ſolo che finite di moſtrare le ineſattezze dell' uno mi ſi preſentano ſubito quelle dell' altro. Parlo del Sig. *Valmont* di *Bomare*, dimoſtratore di Storia Naturale, e autore del Dizionario di queſta Scienza. Rileggendo quella ſua Relazione ſu la decapitazione delle lumache, vi oſſervo alcune mancanze, che qui non poſſo diſſimulare. Primieramente ſi fa chiaro che queſto Naturaliſta, non altrimenti che il Padre *Cotte*, ſi fece a mutilar le lumache ſenza curar punto due coſe rilevantiſſime, l' una di marcare il ſito dove fece il taglio, l' altra di eſaminare la porzione reciſa, per aſſicurarſi ſe aveva preciſamente troncata la teſta; di null' altro iſtruendoci egli in quel ſuo racconto, ſe non che tagliò alle lumache bruſcamente la teſta, la qual voce *bruſcamente* nulla ci dice di ciò che ſi voleva ſapere da lui.

Un' altra ommiſſione di queſto Autore ſi è quella di non iſpecificar la qualità delle ſue lumache. Egli nel citato ſuo Dizionario all' Articolo *Lumaca* ripetendo preſſo a poco quanto molti anni prima aveva fatto imprimere nel Giornale di Berna, e che è ſtato da me traſcritto nel primo Articolo di queſta Memoria, ci avviſa ſoltanto che le lumache da lui decapitate erano *terreſtri*. E di queſte lumache terreſtri ne annumera poi nel citato Articolo quindici ſpecie, e tutte quante abitatrici dei contorni di Parigi, ne' quali contorni inſtituì quel ſuo ſaggio. Tra le lumache terreſtri eſſendovi molte ſpecie che non riproducono, chi non vede la poca eſattezza dello ſperimentatore, tanto meno da ſcuſarſi, quanto che le ſue eſperienze hanno tutta l' aria di voler eſſere deciſive?

Ed a queſta ſua deciſione poi ſi riporta talmente, e con eſſa ſi tiene tanto ſicuro, che moſtraſi affatto incredulo a queſto genere di riproducimenti. Ad inſinuazione dell' illuſtre *Bonnet* feci imprimere nell' *Avant-coureur* li 30 Ottobre 1769 una mia lettera franceſe, di cui più ſotto dovrò far uſo, nella quale additando io la maniera di operare da me tenuta nelle eſperienze, facea toccar con mano la verità di quan-

to asserito io aveva nel *Prodromo*. A questa lettera pertanto da quel celebre mio Amico essendo stato rimandato il *Bomare*, egli ebbe a rispondergli nei seguenti termini li 5 Novembre 1775 ,, Posso assicurarvi, che tutte le sperienze che so-
,, no state da me fatte sul proposito delle lumache, io le trovo
,, contradditorie a quelle dell' Abbate *Spallanzani*. Vedrete
,, all' Articolo *Lumaca* del mio Dizionario, ediz. del 1776
,, quello ch' io dico intorno a questa materia, e di che io
,, aveva già fatta menzione nel 1768,, (*a*).

Quello poi che trovasi impresso in quel Dizionario si riduce in sostanza, come ho detto più sopra, al picciolo Articolo da me altrove trascritto.

Sebbene questo erudito Francese non solamente non deferisce punto alle mie esperienze, ma nemmeno alle altrui. Le esperienze del Sig. *Roos*, e *Lavoisier*, e della Reale Accademia di Parigi sono state impresse nel 1768. I Signori *Müller*, e *Schaeffer* hanno pubblicate le loro, il primo nel 1769, il secondo nel 1770. Tutte queste sperienze erano dunque notissime, assai anni prima che il Sig. *Bomare* nel Dizionario di Storia Naturale stampasse le sue. Tali esperienze ei non poteva ignorare, essendo state pubblicate sotto i suoi occhi, cioè a dire in Parigi; a riserva di quelle del *Ratisbonese Schaeffer* stampate in tedesco in Germania, ma che gli dovevano pure esser note, pel trasunto che se n' era fatto in francese, e che corso aveva per le parti più colte di Europa. Malgrado però l' unanime consenso di queste esperienze, che tutte tendono a consermare le mie, egli col non parlar punto di esse dimostra chiaro di non curarle. Quantunque però sì adoperando l' Autore del Dizionario non mi sembri meritevole di molta lode, tuttavia meno lo condannerei, se le sue sperienze potessero in qualche modo pel merito contrapporsi a quelle dei testè citati Naturalisti. Ma qual figura facciano a fronte di esse, lascio che il decida il dotto ed imparzial leggitore.

Pesate le circostanze che accompagnano i tentativi del chiarissimo Sig. *Schröter*, a me sembra che del cattivo esito dei

(*a*) Questa lettera è impressa nelle Opere del *Bonnet* T. V. Par. I.

medesimi si debba meno accagionare l' Autore, che le lumache. Vero è che in Germania egli è solamente tenuto in conto di prode Nomenclatore, il cui ufficio tanto è diverso da quello del vero Osservatore, quanto la Grammatica differisce dalla Fisica. Vero è non meno che que' suoi tentativi su le lumache furono le prime sperienze che fece in sua vita, sapendosi che prima in un villaggio del Ducato di Weimar, dov' era Pastore, si era occupato di tutt' altro: e pur troppo è notissimo che i primi saggi d'esperienze, che facciamo, non sogliono essere capi d' opera. Tuttavia tenendo dietro al racconto ch' ei fa delle sue esperienze, siamo indotti a pensare che il difetto della riproduzione sia provenuto meno dall' inesattezza di lui, che dalla qualità delle lumache cimentate, in quanto che queste non erano probabilmente di natura atta al riprodurre. Lo argomento da ciò che di moltissime, che mutilò nella coda, niuna ve n'ebbe che riparasse questa parte; quando da lunghissima esperienza ho appreso, non esservi lumaca che non sappia ripararla, quando sono di quelle che hanno facoltà riproduttrice. Egli è adunque troppo naturale l' inferire, che non fossero a parte di tal facoltà le cimentate dal Naturalista Tedesco.

Quell' apologia, che ho cercato di fare al Sig. *Schröter*, avrei voluto farla pel Sig. d' *Argenville*, che egli pure decapitò inutilmente qualche centinajo di lumache. Ma a dir vero non ci trovo luogo; e da quel poco che di questo Naturalista Francese riferisce il Sig. *Murray*, pare ch' ei non possa divider la colpa con le lumache. Dagl' innumerabili miei cimenti su di esse sono stato ammaestrato, che quelle eziandio che non riproducono, non muojono tosto che sono state decapitate, ma seguono a viver più giorni, anzi talune più mesi. In virtù adunque di questo fatto, che è sicurissimo, e che ognuno può verificare da sè, chi non vede che se di alcune centinaja di lumache decollate in un giorno dal Sig. d' *Argenville*, quasi tutte eran perite nell' altro, ciò nacque sicuramente per essere stato più del bisogno crudele con loro, oltrepassando inavvedutamente col taglio i limiti della testa, per cui sappiamo che d' ordinario la maggior parte poco dopo perisce? Qual' altra più naturale conseguenza possiam noi dedurne, volendosi comparar questo suo fatto col mio?

Il poco buon esito dei tentativi del celebre Sig. *Murray* a me pare non possa attribuirsi alle mancanze dagli altri commesse. Le lumache sperimentate da lui furono la *pomatia*, e la *nemoralis*, due spezie che sappiamo esser atte al riprodurre: d' altronde non avendo egli mai nell' amputazione oltrepassato di molto la base delle corna maggiori, si ha fondamento di credere che l' operazione venisse fatta con le dovute maniere. La stagione prossima all' invernale, e poco amica di queste riproduzioni (essendo state da lui incominciate le sperienze li 20 Settembre, e proseguite in Ottobre, e in Novembre) giudicherei piuttosto che concorsa fosse in parte a produrre in esse un succedimento poco felice. E tanto più mi sorprende che questo dotto Professore sperimentasse in quel tempo, quanto che nella sua Memoria cita la mia *Prefazione* alla *Contemplazione della Natura*, nella qual Prefazione tra gli altri avvertimenti relativi a questa materia io tocco questo, che *non ogni stagione è idonea al riprodurre, ma solamente la primavera assai inoltrata, e la state*.

La non troppa diligenza sua nell' esaminare, e nel custodir le lumache dopo che le avea mutilate, è facile che sia stata un altro ostacolo a quel compiuto riproducimento che egli non ebbe. Decapitò in tutto 12 lumache, due in Settembre, e dieci in Ottobre. Una delle due prime sopravvisse poco all' amputazione, e l' altra riprodusse malamente un corno. Suppone poi che quest' ultima sia probabilmente perita, e perchè? perchè *diu post in eam inquirens, tam profunde se se abdiderat, ut attingi nequiret*. Supplico però di perdono questo riverito mio Collega, s' io gli dico che non vi era niente di più facile che fosse viva questa lumaca, quantunque egli più non arrivasse a toccarla dentro del guscio. E vo' dire che pel lungo digiuno sofferto era verosimilmente dimagrata a segno, che più non occupava che l' ima parte della sua casetta. Questo io l' ho veduto assaissime volte nelle lumache da me decapitate, molte delle quali riputato avrei già perite, se valuto mi fossi del giudizio del Sig. *Murray*. Ma il fatto è che rompendo più o meno i margini del guscio, verso il fondo di questo io arrivava a vederle, e a toccarle, e se non tutte, in buona parte almeno si scoprivano piene di vita. Se altrettanto avesse fatto il chiarissimo Professor di Gottinga,

avrebbe

avrebbe forse trovato lo stesso. Sebbene non gli mancavano altri mezzi per assicurarsi della verità della cosa: e questi erano o d' immerger per poco nell' acqua la sua lumaca, o di spruzzarla semplicemente di tal liquore, ovveramente di metterla al sole, giacchè se fosse stata viva, o con l' uno o con l' altro di tali espedienti sarebbe uscita da sè; e per tal guisa quel suo giudizio non sarebbe stato azzardato.

Per rispetto poi all' altre dieci lumache mutilate in Ottobre, dopo l' averci raccontato il Sig. *Murray* che alcune mettevano un principio di riproduzione; finisce col dirci che per un sopraggiunto accidente gli fu conteso di esaminarle più in là.

Lascio decidere al lettore qual conto si possa fare di simili osservazioni. Io però per la stima grande che nutro per questo chiarissimo Professore, sinceramente dirò che più volte meco stesso maravigliato mi sono, come stato sia sì poco diligente, sì poco premuroso pe' suoi tentativi; ed oltracciò come intrapreso ne abbia sì scarso numero, giacchè fuora di quelle due sperienze il rimanente della sua lunga Memoria è quasi tutto un ingegnoso tessuto di cose altrui. Che un Fisico, a cui succeda di ottenere la tante volte menzionata riproduzione, si contenti di poche esperienze, io non avrei che opporgli; che anzi una sola che s' instituisse, e si raccontasse da lui, purchè fosse decisiva, potrebbe soddisfare i dotti. Ma ove trattasi di esperienze negative, o che almeno tendono a rivocare in dubbio le affermative, un contraddittore, se è versato nell' esperienze, se è pesato ne' suoi giudizj, se è circospetto e sagace, in una parola se all' abilità per l' esperienze accoppia una sana dialettica, non dovrebbe a mio avviso prodursi al pubblico, e ciò anche con molta ritenutezza, se non se dopo un numero ben grande di tentativi. Molto poi più trattandosi d' un genere di esperienze, come son quelle de' nostri testacei, molti de' quali, decapitati anche bene, periscono, siccome io il primo candidamente ne ho avvertito il pubblico, e il Sig. *Murray* per la lettura che mostra di aver fatta delle mie produzioni non doveva ignorarlo.

Quantunque questo Naturalista in forza de' suoi risultati si dichiari di voler tenere una strada di mezzo tra quelli che negano la riproduzione e gli altri che la affermano, pure

da alcuni rifleſſi che accompagnano i ſuoi tentativi, e che mi farò lecito di eſaminare, dà egli non oſcuramente a vedere pendere più inverſo i primi, che inverſo i ſecondi.

Riflette egli adunque primieramente che le notomie di queſti rettili fatte dai *Lúter*, e dagli *Swammerdam* non ſono una commendatizia troppo favorevole per tali riproducimenti. Imperocchè avendo eſſi ſcoperta nel capo di queſti animali una moltitudine di parti, e queſte artificioſamente tra loro conneſſe e legate, naſce in noi ſubito una ſpecie di diffidenza, ſe reciſe che ſieno una volta, poſſano veramente generarſi di nuovo.

Riſpondo però che queſta diffidenza ſarebbeſi tutto al più riſvegliata in mente noſtra quaranta anni fa, voglio dire allor quando per la prima volta ſi ſeppe, che il polipo tagliato a pezzi aveva il dono di riprodurſi. Sempliciſſima eſſendo la ſua ſtruttura, pareva che per ragione di eſſa ei godeſſe di tal privilegio, ſiccome lo godon le piante, per la ſemplicità dell' organizzazione non diſſimili al polipo. Quindi ſi ſarebbe forſe dubitato che altri animali più compoſti di lui riprodur non poteſſero. Ma coteſte dubbietà, coteſte diffidenze è da lungo tempo che ſono ſvanite, dopo che ſi è trovato godere della medeſima prerogativa tanti altri viventi del polipo prodigioſamente più compoſti, come ſono molti lombrichi, sì terreſtri che acquatici, varie qualità di vermi, ma ſopra d' ogni altro la ſalamandra acquajuola. Detto ſia per puro amore di verità, non mai per morder la fama di così dotto letterato. I botanici ſuoi ſtudj ch' egli profeſſa con sì grande vantaggio della colta gioventù, e con tanto ſuo onore, non gli hanno laſciato ozio per la Zoologia, nè per le minute notomie, due requiſiti ch' io reputo ſommamente importanti in chi vuole eſercitarſi con lode nelle ſperienze de' noſtri rettili, alle quali eſſendoſi egli accoſtato, pare che entrato ſia in una provincia per lui preſſochè nuova. Quindi io non crederei di offenderlo, ſe gli diceſſi che preſa lingua dal ſuo collega *Wrisberg*, celebre anatomico, e ſperimentatore, ſi faceſſe notomizzare da lui una ſalamandra acquajuola; in grazia della qual notomia potrebbe egli apprendere, che le gambe, e la coda di queſto animale non la cedono punto per la quantità, e per la diverſità delle parti, onde vanno compoſte, alla teſta delle lumache, non oſtante che

cotali membra ſi riproducano perſettamente, e quel che più leva, ſi riproducano ſempre, la qual ultima circoſtanza è ben lungi a verificarſi del capo delle lumache.

Un altro rifleſſo che induce lo Svedeſe Naturaliſta a mettere in dubbio le mie ſperienze è tratto dalla ſpiegazione ch' ei dà alle riproduzioni da lui oſſervate. State eſſendo queſte non già complete e perſette, ma più o meno mancanti e moſtruoſe, trova egli facile lo ſpiegarle, dicendo che non ſono probabilmente che un riſultato del teſſuto cellulare allungato. E tale ſpiegazione a lui ſembra che rendaſi più veroſimile dal muco, di che abbondano queſti animali, il qual muco è forſe cagione che ſenza cibarſi vivano sì a lungo, potendo eſſo in certa guiſa ſupplire al mancante alimento. Ma queſta plauſibile ſpiegazione riflette egli che difficilmente potrebbe aver luogo, ove vogliaſi dire con me, che le parti nuove delle lumache non differiſcono eſſenzialmente dalle vecchie.

Per l' amore ch' io porto al Sig. *Murray*, come a mio dotto Collega, fratello di un mio caro e riſpettabile Amico (*a*), ſento non poco rincreſcimento nel dovere far riſpoſta a queſta ſua rifleſſione, per trovarla piena di coſe diſcordanti dal vero, e poco degne di un ſenſato Filoſofo. Non mi farò qui a moſtrare quanto ſia poco giuſta la ſua congettura, che il lungo vivere delle lumache digiune dipender poſſa dal ſoprabbondante lor muco; e ſolamente accennerò di paſſaggio, che ſiccome le varie ſpecie di rane, e di roſpi, le ſalamandre, ed altri ſimili amfibj la durano ſenza cibarſi niente meno che i noſtri teſtacei, così dovrebbono eſſi egualmente aver miniera di muco, la qual coſa, come ognun ſa, è falſiſſima. Piuttoſto entrerò ſubito in materia, riflettendo primieramente che la difficoltà di ſpiegare un fatto non è mai ſtata pe' buoni Fiſici una ragione di diffidare del medeſimo fatto. Non evvi Filoſofo che ignori le gravi difficoltà che s' incontrano (per non uſcire del noſtro argomento) volendo noi ſpiegare d' un modo ſoddisfacente le riproduzioni de' nervi, e dell'

(*a*) Sig. Adolfo *Murray* celebre Profeſſore di Notomia a Upſal.

offa in alcuni quadrupedi, e uccelli, quella della tefta, e della coda ne' lombrichi terreftri, e l'altra delle membra nelle acquatiche falamandre. Eppure tutti coloro che dominati non fono da fpirito di partito, o da privato intereffe accordano di buon grado la realtà di così fatte riproduzioni, perchè troppo accertate dalla diligenza, e dall' oculatezza de' Naturalifti moderni.

Offervo in fecondo luogo che il noftro Autore è entrato nella fpiegazion d' un fenomeno, fenza prima fapere cofa veramente foffe quefto fenomeno. Innanzi di darfi a credere che le riproduzioni da lui ottenute, confiftenti nelle corna più o meno rigenerate, erano probabilmente un lavoro della cellulare, facea di meftiere l' accertarfi bene della loro qualità, e natura. Non doveva egli dunque acquetarfi a quelle fuperficiali apparenze di moftrofità, ma da cauto e pefato Naturalifta dovuto avrebbe andare più in là, efaminando attentiffimamente fe la novella porzione delle corna era organizzata come la vecchia, e voglio dire fe efternamente era feminata di glandolofe granella, e internamente munita del fuo mufcolo, e del fuo nervo; oltracciò s' ella aveva quella fenfibilità, quel moto, quell' azione di allungarfi, e accorciarfi che fi offervano naturalmente nelle corna di quefti animali. Se con quefte efatte e neceffarie ricerche poco o nulla di ciò rifcontrato aveffe il Botanico di Gottinga, e fe in quella vece trovato aveffe una fpecie di cellulofità, o di teffuto inorganico, allora la fua fpiegazione poteva aver qualche luogo: ma non già fe le parti novelle foffero ftate nell' organifmo più o meno fomiglianti alle vecchie, e molto meno fe come loro foffero ftate animate. E per la lunghiffima efperienza che io mi lufingo di avere intorno a quefti fatti, penderei di molto più a credere, che a non credere il vero organifmo nelle riproduzioni del *Murray*, malgrado quelle efteriori moftrofità.

Ma in terzo luogo dato eziandio che quelle fue riproduzioni ftate foffero poco meno che inorganiche, era egli quefto un baftante motivo di redarguire le mie, per avere io detto di averle trovate organizzate come le vecchie, quafi che le mie doveffero prender norma dalle fue; e ciò per quella fingolariffima ragione, che fuppofto in effe il primiero orga-

nismo, non era questo spiegabile per l' immaginata sua ipotesi del cellulare tessuto? E come non s' accorgeva il chiarissimo Svedese che la sua redarguizione anzi che offender me, offendeva i principj della Logica la più comunale?

Consenta egli di grazia ch' io dica anche una parola delle sue sperienze. In grazia di esse si è egli determinato ad usare una specie di neutralità tra i miei Impugnatori e i miei Favoreggiatori. Queste sperienze gli hanno fatto vedere un principio di riproduzione: dunque non poteva egli essere pienamente del partito de' miei Impugnatori. Ma tal riproduzione non è mai stata perfetta. Dunque non poteva neppure del tutto aderire a' miei Favoreggiatori. Quindi egli dice che ha dovuto dichiararsi neutrale tra i primi e i secondi.

Ma o fortemente io m' inganno, o a me sembra che tutt' altro buon Fisico, che trovato si fosse nelle circostanze del Sig. *Murray*, ragionato avrebbe diversamente. Questo Fisico, supponendolo equo e imparziale, non v' ha dubbio che quella fede che prestato avesse alle proprie esperienze per cui vedeva qualche riproduzione, e a quelle de' miei Impugnatori, per cui non ne vedeva nessuna, prestata anche l' avrebbe a quelle de' miei Fautori, in grazia delle quali veniva a provarsi una completa o quasi completa riproduzione. Massime poi se questi ultimi erano per una parte versatissimi nelle sperienze, e per l' altra godevano della confidenza del pubblico, quali sono per appunto un *Lavoisier*, un *Schaeffer*, un *Müller*, e un *Herissant*, citati dal Sig. *Murray*. Ma qual immediata conseguenza da questa diversità di esperienze tratta ne avrebbe il nostro Fisico se non questa, che dunque talvolta le lumache non riproducono, tale altra riproducono male, e tale altra riproducono bene? Ma tal conseguenza si accorgeva egli subito che si risolveva in quest' altra, che dunque le lumache hanno la facoltà di riprodur bene le parti perdute, ma che questa facoltà non viene sempre all' atto, distoltane non rade volte da una o più cagioni, che ne distruggono o ne sminuiscono il buon successo. Condotto e diretto da questi giusti raziocinj facilmente sarebbesi accorto che in buona Logica non gli era permesso il tenere, come fa il *Murray*, una via di mezzo tra' miei Negatori, e i miei Fautori, ma che era astretto a dichiararsi per gli ultimi. Quanto poi ai suoi

tentativi non troppo favorevoli per queste riproduzioni, o incolpate ne avrebbe le lumache, per qualche turbatrice cagione poco atte al riprodurre, o qual Filosofo ingenuo fors' anche sospettato avrebbe che i suoi tentativi non fossero stati i meglio instituiti.

Lo *Swammerdamio*, per quanto è a me noto, è stato il primo che ci ha data un' esatta descrizione del cervello delle lumache. Cotal descrizione viene mirabilmente confermata dal chiarissimo Sig. *Girardi*. Io altresì di quest' organo ho parlato nel mio *Prodromo*, e nella prima Memoria dietro alle mie proprie osservazioni. Il Sig. *Murray* dal vedere che le lumache decapitate, quantunque non riproducano perfettamente, vivono però lungo tempo, stenta ad accordare tal verità; per essere il cervello troppo necessario alla vita degli altri animali: *cum cerebrum in aliis animantibus omnium maxime sit necessarium*.

Ognuno si accorge che la forza di questo argomento egli l' appoggia tutta all' analogia, in quanto che dal vedere che una immensità di animali non può vivere senza cervello, ne inferisce che lo stesso debba dirsi delle lumache, le quali perciò se dopo la decapitazione vivono a lungo, convien credere che di quest' organo vadano prive. Ma ognuno altresì tanto o quanto versato in Fisiologia si accorgerà di leggieri quanto sia facile l' ingannarsi, volendo noi far uso dell' analogia, ragionando degli animali, massime allora quando da ciò che succede ne' grandi vogliamo argomentar quello che deve accadere ne' piccoli. Io però chiederei volentieri a questo illuminato Svedese, se quel liquor rubicondo che circola ne' vasi arteriosi, e venosi delle rane, de' rospi, delle salamandre, e simili, pensa egli che sia vero sangue. Voglio darmi a credere che non sarà per metterlo in dubbio, per trovarsi composto di particolette globose, per nuotare in una specie di linfa o di siero, per rappigliarsi, uscito che sia dai proprj vasi, e per avere l' altre proprietà, che convengono al sangue degli animali maggiori, e di noi stessi. Siccome adunque egli è fuor di contrasto, che cessando negli animali più grandi, e in noi la circolazione, lasciamo in breve di vivere, così in forza dell' analogia dovrebbe dirsi lo stesso de' minuti animali. Eppure contrariamente va la faccenda, essendo io

ſtato iſtruito dalle mie proprie eſperienze, che nelle ſalamandre, ne' ranocchi, nei roſpi ſi può far sì che il ſangue non circoli dentro di eſſi per un giorno intiero, oppure ſi può da loro fare uſcir tutto il ſangue, ſenza che i medeſimi per tutto quel tempo laſcin di vivere (*a*). Se a un cavallo, a un bue, a un montone, a un cane, ecc. ſi ſtrappi il cuore dal petto, non è egli vero che queſti animali a ſangue caldo quaſi ſul momento periſcono? Ma non è egli vero egualmente che facendo lo ſteſſo giuoco ai ſoprariferiti animali di ſangue freddo ſeguitano eſſi per più giorni ad eſercitar le funzioni vitali? Chi ignora che recidendo le gambe agli animali caldi, ſi obbligano in breve a mutar la vita con la morte? Ma chi evvi omai preſentemente che non ſappia, che facendo lo ſteſſo giuoco alle ſalamandre acquajuole, ben lontano dal ſoccombere, ricuperano queſte membra perdute? Si vede adunque di quanti errori ſarebbe origine l' analogia, ſe prendendola dai caldi la voleſſimo applicare agli animali freddi. Sebbene anche ſul propoſito del cervello, queſta medeſima analogia non ſi ſcopre fallace? E' innegabile che lo ſpogliare di queſt' organo un animale di calda tempera, e il recargli ſubito la morte tornan lo ſteſſo. Ma ſi faccia un poco il ſimile ad una vipera, ad una biſcia, non che ad un roſpo, ad una ſalamandra, a una rana. Non è egli del pari innegabile che la vita di queſti animali tira a lungo ciò non oſtante per più giorni, e ſe ſia d' inverno per più ſettimane, ſiccome ho avuto campo di ſperimentare io ſteſſo? Qual è quel Fiſico a noſtri giorni sì inerudito che ignori i due fatti notabiliſſimi diſcoperti dall' immortal *Redi*, l' uno d' una teſtuggine che decapitata continuò a vivere per ventitre giorni, l'altro d'un'altra teſtuggine che priva affatto di cervello campò ſei meſi? Dirà forſe il Sig. *Murray* che anche le rane, i roſpi, le ſalamandre, le biſcie, le vipere, le teſtuggini non hanno cervello? E ſe nol può negare in queſti animali, non oſtante che mancando di eſſo ſeguano a vivere per un tempo più o meno lungo, nol neghi tampoco o nol metta in dubbio nelle lumache, dovendoſi egli accorgere da

(*a*) Opuſcol. di Fiſ. Anim. e Veget.

questi fatti che la ragion di negarlo o di metterlo in dubbio, tolta dal potere elleno vivere a lungo senza quest' organo, è insussistente e ridicola. Sebbene se ad onta del fin qui detto rimanesse tuttavia nell' animo di questo celebre Naturalista qualche ombra di dubbio intorno al cervello de' nostri testacei, più altro far non saprei che invitarlo a farselo mostrare dal Sig. *Wrisberg*, a quel modo che preso mi sono l' ardire di pregarlo a voler consultare quell' esimio Notomista per osservar gli arti delle salamandre acquajuole.

Ma il Sig. *Murray* non solamente dubita del cervello delle lumache, ma quel che è più, e che certamente il mio lettore non si aspetterebbe, dubita anche della testa. Egli adunque nella sua Memoria non ha difficoltà di dire che adopera tal vocabolo, meno per servire alla verità, che all' uso introdotto dal volgo, e da molti eruditi. Io però per riguardo a un tal punto confesso la mia ignoranza di avere sempre sentito con questi eruditi, e col volgo. Io aveva sempre con loro creduto, che un animale che ha occhi, che ha nervi ottici, che è fornito di labbra, di bocca, di mandibole, di denti, di lingua, di palato, di cervello; e che di questa bocca, di questi denti fa uso per prendere il cibo, per tritarlo, e mandarlo allo stomaco, avesse veracissima testa. E per mia istruzione chiederò volentieri al Sig. *Murray*, che m' insegni cosa vi si richiegga di più, perchè possa dirsi che un animale abbia testa. Che se egli mi rispondesse non trovarsi nella lumaca quell' intiero complesso di organi, che si osserva ne' quadrupedi, negli uccelli, non che in noi, non saprei acquetarmi a questa risposta, giacchè in forza di essa sarebbero dunque privi di testa i pesci, le serpi, le rane, ed altrettali animali, la quale stranezza non credo che sia mai caduta in mente a nessuno. Che se egli piuttosto avvisasse che intanto la lumaca non ha testa, in quanto che non ne ha punto la forma, non essendo una parte spiccata dal rimanente del corpo, ma bensì continuata con esso, risponderei che il ragionare di questo modo sarebbe un voler adattare la ristrettezza delle nostre idee all' immensità della Natura. Vero è che la testa di molti animali sporge in guisa dal busto, che fa come corpo da sè: ma in quanti altri non vi è ella unita in guisa, che viene con lui a formare come un

sol

ſol tutto? Non è forſe tale nella famiglia delle balene, e degli altri cetacei? Non in quella dell' immenſo popolo dei peſci ſquamoſi? Non nell' altra pur numeroſiſſima delle ſerpi, e degli amfibj?

Sebbene chi ſa che il Profeſſor di Gottinga più per motivo di ſiſtema, che d' altro dubiti che i noſtri rettili abbiano teſta, voglio dire che il faccia ſu la parola del Linneo, una volta ſuo Maeſtro, e di cui è grandemente ſeguace, il qual Linneo non ſolamente mette in dubbio queſta teſta, ma affatto la nega, per entrar le lumache nella claſſe de' vermi, i quali tutti per lui ſono aceſali. Siccome però queſto illuſtre Naturaliſta di ſua negazione non adduce la più picciola pruova, e d' altronde ſiamo in un ſecolo, in cui poco ſi valuta l' autorità de' gran nomi, quando non è accompagnata dal peſo delle ragioni; così a quel modo che non poſſo accordarmi con lo Scolare, nol poſſo neppur col Maeſtro. E del mio ſentimento mi luſingherei bene di avere non ſolamente *molti eruditi*, ſiccome ſuppone il *Murray*, ma tutti i Naturaliſti di Europa, a riſerva di quelli che idolatrando il già celebratiſſimo Profeſſore di Upſal, reputano gran peccato in Filoſofia l' allontanarſi per poco da' dogmi ſuoi.

Finiſco di ragionare del chiariſſimo Sig. *Murray* col purgarmi d' una lieve accuſa ch' egli mi dà. Quantunque ei convenga ch' io ſia lo ſcopritore della riproduzione del capo nelle lumache, non vuol però ch' io lo ſia di quella dei *tentacoli*, ovvero corna, come ſi fa chiaro dalle ſeguenti ſue parole. „ *Si de tentaculis ſolis ſermo eſt: non poteſt ille jure rei* „ *inventor haberi. Etenim illi a Linnè jam viginti annos an-* „ *tea cochleas reſumere tentacula poſt reſectionem edixit:* e ſi riporta alle ſue *Amenità Accademiche*. T. II. p. 58.

Quando nel 1768 pubblicai il mio *Prodromo* non avendo io letto le dette *Amenità*, confeſſo ingenuamente ch' io mi credeva di goder ſolo di queſta picciola gloria. Ma dopo anche di averle lette io non ho ſicurezza che altri l' abbia goduta prima di me. Conſultando adunque quel luogo io non trovo, quanto alla ſoſtanza, nè di più nè di meno delle riferite parole. Non dice quell' illuſtre Botanico ſe ſia ſtato egli che abbia fatta queſta oſſervazione: non dice ſe ſia ſtata inſtituita da altri; molto meno aſſegna la maniera con cui è ſta-

ta inſtituita. Il dirſi adunque da lui che le lumache riproducon le corna, non è altro che un nudamente aſſerirlo. Ora io domando al riſpettabile Sig. *Murray*, qual fede preſtar ſi debba ad una ſemplice e nuda aſſerzione? Finattantochè adunque non ſi compiacerà egli di farmi noto chi abbia prima di me oſſervato queſto fenomeno, e come ſia ſtato oſſervato, non aſcriverò a mia arroganza il credere d' eſſerne io ſtato lo ſcopritore, facendoſi per me mallevadore il grande Hallero, dicente: *æquo animo oportet expendiſſe, non eum verum inventorem eſſe, cui vaga aliqua cogitatio elapſa ſit, in nullo fundata experimento; ſed eum omnino eam laudem mereri, qui verum ex ſuis fontibus per ſua pericula, ſuaſque meditationes eruerit, & adeo firmis rationibus ſtabiliverit, ut veri cupidos convincant* (*a*).

Non più che di due Oppoſitori mi reſta ancora di ragionare prima di por fine alla preſente Memoria, voglio dire dei Signori *Preſciani*, e *Adanſon*. E per rifarmi ſul primo, ſe qualche illuminato Naturaliſta ſi foſſe mai abbattuto nelle ſue ſperienze, di cui è ſtata da me riferita la ſomma, facilmente ſi farà accorto che non ſono un ſaggio di Logica applicato alla Fiſica; e quindi avrà potuto conoſcere, non eſſere punto a ſtupire ſe tali eſperienze ſono ſtate defraudate di quel buon ſucceſſo, che ſi poteva aſpettare. Ad onta però di queſto, volendole io comparare con le ſperienze degli altri Contradditori fin qui menzionate, a me ſembrano meno difettoſe; e que' difetti medeſimi di che ſono avvolte, ſono perdonabili, per averle intrapreſe l' Autore in un' età, nella quale ſono meno da riprenderſi gli errori, che da commendarſi la volontà. Aggiunger debbo a ſavore di queſto ſtudioſo giovane, che quando pubblicò quel ſuo Saggio, non laſciò per lettera di rendermene inteſo, e obbligantemente di chieder da me qualche ſuggerimento, perchè in evento che foſſe per intraprenderne qualche altro ſu la ſteſſa materia, ſperar poteſſe miglior fortuna. E dal veder io la ſua docilità, e dal ſembrarmi non troppo addeſtrato nello ſperimentare, nè punto conſapevole delle belliſſime Memorie ſu le lu-

(*a*) Phyſ. T. I.

mache de' Signori *Müller*, e *Bonnet*, per tacere degli altri, che fcritto hanno lodevolmente fu lo ftesso argomento, io lo rimandai alla lettura di quefti prodi Naturalifti, perchè da effi poteffe apprendere il metodo di fperimentar bene, e quindi fi rendeffe abile a riufcir meglio ne' fuoi tentativi.

Paffiamo ora a parlare del Sig. *Adanfon*, ma per farlo nelle dovute maniere mi conviene prender le cofe alquanto da alto. Quando mi ragguagliava l' illuftre Sig. *Bonnet* con fua lettera de' 26 Agofto 1769 (*a*) delle offervazioni de' Signori *Cotte*, e *Bomare*, e che moftrava di reftar perfuafo ch' io non mi era ingannato, ficcome pretendevano quefti due chiari Fifici, la fua ingenuità non gli permetteva però che diffimulaffe di dirmi " fono ciò non oftante obbligato a farvi „ fapere che un celebre Naturalifta Francefe, che ha fottopo„ fte a' fuoi tentativi molte centinaja di lumache, è perfuafo „ che quando venga recifa tutta quanta la tefta, l' animale „ non ne rifabbrica mai una nuova. Pubblicherà ficuramen„ te la ferie delle fue fperienze, e la fua autorità farebbe „ d' un pefo di gran lunga maggiore di quella d' un *Cotte*, „ e d' un *Bomare*. Quefto valente Offervatore, notiffimo ai „ Naturalifti, e che non vuole ch' io lo nomini ancora, è „ grandemente convinto che quando voi avete creduto di ta„ gliar *tutta la tefta*, non avete realmente tagliato che i fo„ li integumenti della tefta, o una *parte* di quefti integu„ menti. Mettetemi dunque in iftato di convincerlo, che „ egli fteffo fi è ingannato, non voi. Ditemi il più prefto „ che è poffibile, fe quando avete tagliata la *tefta*, voi ave„ te ufata la cautela di efaminare al microfcopio la tefta ta„ gliata, per afficurarvi che conteneffe quegli organi tutti „ che formano nella lumaca ciò che dicefi *tefta* „.

La gentile premura di quefto mio caro e rifpettabile Amico, e la parte ch' io prender doveva in quefta caufa, fecero ch' io non indugiaffi un momento a ftendere una lettera, in cui defcriveva il metodo praticato nelle mie fperienze, il qual metodo non era efpofto nel *Prodromo*, per non accen-

(*a*) Quefta lettera è ftampata nelle fue opere T. V. Part. II.

narſi quivi che la ſomma dei riſultati . E queſta lettera che dettai in franceſe , e che mandai al Sig. *Bonnet* , fu pubblicata nell' *Avant-coureur* dei 30 Ottobre del 1769 , e da lui è poi ſtata riprodotta nella ſeconda ſua Memoria *ſu le Lumache*. Il riſtretto della medeſima è il ſeguente.

Voi mi chiedete ſe la teſta da me reciſa conteneva veracemente tutti gli organi , che appartengono alla teſta delle lumache . Eccovi come io mi ſono regolato per aſſicurarmi della verità della coſa. Come io ſeppi che queſti rettili hanno la prerogativa di riprodurre , mi feci a notomizzarli per iſtruirmi fondatamente del loro organiſmo, ed in iſpezieltà di quello della teſta . La macchinetta anatomica del celebre *Lyonet*, munita delle ſue lenti, de' ſuoi ferruzzi, ecc. è ſtata quella di che mi ſono valuto in queſta, ed altre ricerche anatomiche relative alle lumache . Io le facea perir dentro all' acqua, così uſcivano ottimamente del guſcio, allungando quanto più potevano le corna , e la teſta , e in tal poſtura ſene morivano, laſciando così all' oſſervatore il poterle nella miglior maniera notomizzare . Con queſti mezzi ho potuto accertarmi che la teſta delle lumache comprendeva effettivamente quell' intiero numero di parti, che dal ſommo Naturaliſta *Swammerdamio* era ſtato oſſervato.

Non è dunque ſtato ſe non dopo queſti pratici ſtudj ch' io di propoſito applicato mi ſono a decapitar lumache, ed eccovi, illuſtre mio Amico, come io coſtumava di fare. Prima di decapitar la lumaca la laſciava uſcir beniſſimo del proprio nicchio , così che la teſta , e le corna foſſero interamente ſpiegate . Allora con forbici affilatiſſime io paſſava all' amputazione, che riuſciva mirabilmente, e la teſta già reciſa veniva da me poſta nell' acqua, dentro cui in poche ore ſi dilatava, ſi rammolliva, e in tal guiſa io poteva più facilmente notomizzarla.

Cominciava la notomia dalla parte dov' era ſeguito il taglio, e dopo l' avere levati gl' integumenti, aveva il piacere di oſſervar diſtintiſſimamente la diſtribuzione dei nervi, che vanno agli occhi , e all' altre parti del capo . Oſſervava eziandio con la medeſima diſtinzione i varj muſcoli, che fervono ai diverſi movimenti del capo , e non rade volte tra mezzo vi ſcorgeva il cervello . Continuando la notomia mi

era agevole il trovarvi l' altre parti, come sono il principio dell' esofago, la lingua, le labbra, la bocca, i denti, e le quattro corna munite de' loro nervi, de' loro muscoli, e dell' altre loro dipendenze.

Ecco, mio illustre Collega, le parti più notabili che osservavansi alla mia vista nella testa recisa. Vi domando ora se il complesso di tutte queste parti da me vedute e rivedute innumerabili volte, non è altro che gl' integumenti della testa, o una parte di questi integumenti, siccome ha preteso l' anonimo Naturalista Francese, di cui mi parlate? O se anzi tal complesso non viene interamente a formare ciò che dicesi *vera testa*, così che nel cimentar le lumache io potessi tenermi sicuro di averle veracemente decapitate?

Quelle minute osservazioni ch' io faceva su la testa vecchia, le faceva su la nuova. Sarebbe superfluo ch' io vi dettagliassi le parti, onde quest' ultima era composta. Non farei che ripetervi parola per parola quanto ho fin qui detto intorno alle parti, di cui è formata la testa vecchia, ossia la testa recisa. Dirovvi di più che ho avuto perfino l' avvertenza di misurare la testa tagliata, e di confrontar le misure con la testa rigenerata.

Così a giustificazion mia io scriveva, sono già quindici anni, al Filosofo di Ginevra, che non lasciò di comunicar la mia lettera al celebre Contraddittore Francese, ch' io ignorava allora chi fosse, e che solamente dopo alcuni anni sospettai chi potesse essere da una lettera che in Reggio favorì di leggermi il chiarissimo Sig. Abbate *Corti*, attual Superiore del Collegio de' Nobili in Modena. Questi era il Sig. *Adanson* che gliela scriveva, il quale tra l' altre cose venendo a ragionare della mia scoperta, dopo l' averla caratterizzata per una baja, per una menzogna, e me per un romanziere, per un impostore, usava le dianzi citate frasi d' *integumenti* o *invoglio della testa;* che erano quelle parti sole che a lui detta io aveva recise, quando io non aveva avuta difficoltà di pubblicamente spacciare di aver tagliata veracemente la testa.

Questi miei sospetti io li trovai poscia verificati allorchè nella state del 1779 mi fu dato di godere per alcuni giorni a Ginevra della dottissima e amabilissima compagnia del Sig. Carlo *Bonnet*. Veduta avendo egli l' incredulità del Sig. *Adan-*

ſon ſul noto riproducimento, dichiarata già apertamente nella lettera ſcrittagli li 30 Luglio 1769, e da me riferita in riſtretto nel primo Articolo, ſtimò a propoſito d' invitarlo a leggere la ſua prima Memoria ſtampata già nel Giornale di Fiſica dell' Abbate *Rozier*, per vedere qual' impreſſione poteva fare ſu l' animo di quel rinomato Accademico. E certamente da quel poco ch' io ho detto di tal Memoria nel ſecondo Articolo, pareva che doveſſe convertirlo. Pure chi lo avrebbe creduto? Non ſervì eſſa che a confermarlo nel ſuo pirroniſmo. Tanto io appreſi con ineſplicabile mio ſtupore da una lunga lettera che nel ſuo delizioſo villereccio ſoggiorno mi diede a leggere il Sig. *Bonnet*, e che egli in ſeguito ha poi fatta pubblica nel principio della ſua ſeconda Memoria. Non poſſo diſpenſarmi dal riferirne i tratti più principali. In eſſa dunque ci fa ſapere il Sig. *Adanſon* eſſer quaſi dieci anni che non ſi occupa quaſi in altro che nel decapitare lumache. Che l' immenſità di queſte decapitazioni lo ha vie più perſuaſo di ciò che dal bel principio preveduto aveva col ſenno, e ſi vuol dire che mozzata una volta radicalmente la teſta a queſti animali, non è mai che più la riſacciano. Quindi con la maggiore ſincerità del mondo quelle ſperienze che il Sig. *Bonnet* credeva deciſive per la riproduzione, egli non eſita punto ad opporgli, che le trova piuttoſto confermatrici del contrario, o almeno ſommamente dubbioſe ed equivoche. Il Ginevrino Sperimentatore adunque ſi dava a credere di tagliar vere teſte, e a giudizio del Sig. *Adanſon* non ne tagliava che delle apparenti. Quindi le riproduzioni ch' egli ne ottenea non erano ſoſtanzialmente che invogli di teſte, che i loro *berrettini* o le loro *calotte*, come ama chiamarle queſto Accademico. Non era egli dunque nelle ſue ſperienze più oculato di me, nè più deſtro.

Tutto il male poi ne veniva dalla poca noſtra perizia nel fare il taglio. Perchè adunque noi due più non la ſgarraſſimo ſi vide il Sig. *Adanſon* come in una ſpecie di dover filoſofico di preſcriverci il metodo con che operare; ed io mi luſingo bene che i miei lettori ameranno di ſentir queſto metodo, per eſſere un Maeſtro che lo inſegna, e di ſentirlo ne' termini ſteſſi dell' Autore.

„ Prendete (così egli in quella ſua lettera iſtruiſce il Sig.

„ *Bonnet*) o la groſſa lumaca gialliccia di vigna, nomata *po-*
„ *matia*, oppure la lumaca bruna di giardino, da noi detta
„ il *giardiniere*, che è la più comune di tutte: dopo di a-
„ verle tenute immerſe uno o due giorni nell' acqua per iſ-
„ minuire la loro vivacità, e la loro lubricità, ſtrappate ad
„ eſſe la maſcella ſuperiore, lavorata a ferro di cavallo, e
„ circondata da cinque o ſei denti; ſtrappate il palato infe-
„ riore, che è una membrana dentata come la lingua d' un
„ gatto, ſtrappate le due grandi corna fornite di occhi, ſerven-
„ dovi di picciole tanaglie munite di reſe o di ſtoppa per ren-
„ derle meno taglienti, meno sdrucciole, oppure ſtringendo
„ il collo dell' animale con due dita per eſtirpar le maſcelle:
„ prevaletevi di queſta ſituazione sforzata per iſnocciolare con
„ tagliente coltello botanico le due corna più grandi col bul-
„ bo inferiore degli occhi: ſtrappate ad altre lumache le in-
„ tiere teſte, verificando ſe queſte ſtrappate teſte ſono corre-
„ date di maſcelle, e d' occhi interi: e tenete con geloſia
„ cuſtodite tutte queſte ſtrappate teſte, tutte queſte ſtrappate
„ maſcelle, tutti queſti ſtrappati occhi, per aſſicurarvi che
„ avete tante teſte ſtrappate, quante ſono ſtate le lumache
„ per voi mutilate „.

Noviſſimo e del tutto inaſpettato ſarà giunto ſicuramente a' miei lettori queſto metodo di decapitar le lumache, in grazia della qual novità io non dubito punto che ſtati ſieno da non lieve ſtupore compreſi. Ma oltre allo ſtupore è grandemente a temere non ſiaſi in loro riſvegliata un' altra affezione, ch' io quaſi non vorrei dire, cioè quella del riſo. Al certo che queſta doppia impreſſione venne cagionata ſu l' animo mio la prima volta che in caſa del Sig. *Bonnet* io leſſi quella lettera: e quello che accadde a me, accadde egualmente ad una ſcelta corona d' uomini ſcienziati, che quivi allor ſi trovavano; ed è accaduto del pari a tutti quelli, cui l' ho data a legger dappoi. E come di fatti rattenerſi dallo ſtupire, e dal ridere al ſentir cotal metodo? Gli altri miei Contradditori, e tutti i miei Fautori non diſcordavan fra loro intorno al modo di mutilar le lumache, che era quello di farle uſcire ben bene del guſcio, e di decollarle allora d' un colpo ſolo per via d' una forbice, o d' un coltello o raſojo applicato alla radice delle corna maggiori. Ed un tal

metodo sembra il più ovvio, il più naturale, e insiememente il più sicuro. Sorge un Naturalista d'alto nome, uno che per giudizio di molti Francesi, e più per suo proprio, è valentissimo nell'arte di sperimentare, uno che per dieci anni quasi continui si annunzia d' essersi occupato nel laborioso esercizio di decapitar lumache, di osservarle, di notomizzarle, il quale sentenziosamente ci fa sapere il metodo fin qui adoperato in queste decapitazioni esser fallace, e ne propone un suo proprio, che reputa sicurissimo; chi v' è tra curiosi della sperimentale Filosofia, che non desideri sentir questo metodo? Ma chi v' è tra questi, se Dio mi ami, che dopo l' averlo sentito possa non trasecolare, e rattenere le risa, al trovarlo, quanto inopportuno e chimerico, altrettanto ridicoloso? Il Sig. *Adanson* ci dà per primo precetto di tener tuffate nell' acqua per uno o due giorni le lumache, a fine che più non siano tanto sdrucciolevoli, nè tanto vivaci. Ma dubito forte che con tal precetto egli c' insegni a decapitar degli animali piuttosto morti, che vivi. Che al certo e la *pomatia*, e la lumaca bruna de' giardini (le due specie ch' egli consiglia di usare) o non la possono durare per sì lungo tempo dentro dell' acqua, o almeno s' indeboliscono a segno, che difficilmente sopravvivono al taglio. Io ho veduto innumerabili volte, che queste, e tutte l' altre lumache terrestri da me cimentate, subito che si trovano immerse in questo elemento, fanno ogni sforzo per uscirne, inerpicandosi su le pareti de' vasi, e tirando anche seco que' corpi, a cui son legate, quando questi non sieno troppo pesanti. L' acqua è quel fluido che per la pelle s' insinua troppo facilmente dentro questi animali, che in poche ore li gonfia tutti, e che loro in seguito diviene fatale. L' obbligarli dunque a rimanervi dentro immersi per tanto tempo, per quanto vorrebbe l' Accademico Parigino, non è soltanto uno sminuire la loro vivacità, è un farli realmente morire. E a che serve allora il decapitarli? Ma quand' anche alcuni di loro non soccombessero, è però sempre vero che una sì lunga dimora in quel liquido viene ad enormemente alterare lo stato di sanità, per cui o finiscon di vivere poco dopo l' amputazione, o rendonsi inetti al riproducimento.

Ma concediamo che l' acqua non sia loro fatale, nè tampoco nociva;

nociva; chi non vede che quello che non fa cotesto elemento, lo dovranno fare necessariamente gli ordigni inventati dal Sig. *Adanson* per mutilar questi animali? Chi v' è d' ingegno sì stupido, sì tenebroso, che non s' avvegga che quello strappare separatamente e mascelle, e palato, e corna, ed occhi, quel ricorrere a tanaglie, e a coltelli botanici per questi sterpamenti di parti, è un cercar di farli morire, non riprodurre? Sentasi il savio giudizio datone dall' illustre *Bonnet*. „Io „ non trovo termini, onde esprimere tutta la sorpresa che „ cagionò in me la lettera del Sig. *Adanson*, nè dubito punto „ che il mio lettore non la divida con me. Ciò che il „ mio dotto corrispondente m' invitava di fare era perappunto „ quello che direttamente si opponeva al buon successo „ dell' esperienza; conciossiachè come strappare con tanaglia le „ differenti parti del capo d' una lumaca, senza produrre i „ maggiori disordini nel suo interno? Come altresì poter riuscire „ a strappare in tal guisa tutte queste parti? E supponendone „ ancora il riuscimento, non arrischieremmo noi di „ distruggere con tal mezzo le sorgenti di riparazione di coteste „ diverse parti? Non bastava egli forse ch' io assicurato „ mi fossi col più attento esame della testa recisa alle mie „ lumache, che questa conteneva tutte le parti, che la caratterizzano, „ come le quattro corna, la bocca, le mascelle, „ ecc.? Era egli necessario di snocciolare con botanico „ coltello le grandi corna, per accertarmi se la lumaca „ ne riprodurrebbe di nuove? Non bastava egli che avessi veduto „ e riveduto più volte la nascita, e i progressi delle corna „ novelle, e che osservato avessi il nuovo occhio, e il suo „ nervo ottico comparire i primi in questa ammirabile riproduzione?„ (*a*)

Ma del metodo ritrovato dal Sig. *Adanson* io ho detto abbastanza, e forse anche troppo, vergognandomi omai d' essermi trattenuto tanto sopra di un' inezia, cui pare impossibile possa essere venuta in mente a un Naturalista di tanto nome. Ed è fuor di dubbio che in grazia di sì strano metodo

(*a*) L. c. T. V. Part. I.

non ha egli mai potuto riuſcire ne' ſuoi tentativi. Si è già veduto nel primo Articolo, che quando nel 1769 egli ſcriveva al Sig. *Bonnet*, infruttuoſamente mutilato aveva dentro d'un anno più di 1400 lumache. Dalla ſeconda ſua lettera nel 1778 indiritta al medeſimo ſi raccoglie che in tutto quel frappoſto intervallo non avea quaſi fatto altro che inutilmente trattenerſi nelle ſteſſe eſperienze. Onde chiaro appariſce quante migliaja e quante di queſti poveri rettili ſono ſtate la vittima di quel rinomato Franceſe, che per riſparmiare la vita ad altri animali da lui cimentati ſarà forſe ſtato ſperimentatore eccellente, ma che per i noſtri non poteva eſſer peggiore. Io però ſu la mia fede poſſo accertarlo, che ſe mai aveſſe talento di ripigliare i medeſimi tentativi, potrebbe continuarli fino al *die judicj*, per parlar col Villani, ſenza ſperanza d'ottenere una ſola riproduzione; e a reſtar perſuaſo di quanto io dico, baſta l'avere, cred' io, il ſenſo comune.

Non poſſo laſciar di parlare del Sig. *Adanſon*, ſenza prima far parola d'un altro animale riproducente, voglio dire la ſalamandra acquajuola. Neppure i miei ſaggi ſu queſto picciol quadrupede hanno potuto incontrar la ſua grazia. Il numero delle ſalamandre, a cui tagliò egli quando le gambe, quando la coda, non è forſe ſtato inferiore a quello delle lumache decapitate. Ma con che pro? A quel modo che a queſte non è mai venuta in ſue mani la teſta, a quelle non ſono mai venute le gambe, nè la coda. Solamente in luogo di queſte membra ſono talvolta ſaltati fuora de' moncherini informi, delle maſſette di carne inorganiche. Qui adunque quando nel *Prodromo* io parlava di queſte riproduzioni, come di coſe reali, io aveva, ſecondo ch' egli avviſa, le traveggole agli occhi, prendendo per vere gambe, per vere code rigenerate ciò che non ne aveva che qualche ombratile ſembianza ſotto quelle forme ingannatrici di moncherini, di inorganiche maſſe carnoſe. E ſingolarmente per ciò che riguarda le code, egli mi redarguiſce ch' io doveva ſapere che quella coda, che sì frequentemente rifatta ſi oſſerva nelle lucertole, non è altrimenti una vera coda, una coda compoſta di vertebre oſſee, ſiccome è tale la coda naturale di queſti ſerpentelli, ma ſibbene un rozzo moncone ſcaglioſo. A quel modo adunque che non ſi può dire in rigore che le

lucertole rifabbricano la coda perduta, io non dovea pur dirlo delle salamandre, per andar composta la coda di queste di una numerosa serie di vertebre ossee, non altrimenti che si osserva nelle lucertole. Così mi sgrida il chiarissimo Sig. *Adanson* nella sua lettera dei 30 Luglio scritta al Sig. *Bonnet*, e da quest'ultimo pubblicata nella sua prima Memoria su le Lumache.

Cerchiam brevemente di liberarci da queste due accuse, l'una relativa alle salamandre, l'altra alle lucertole. E quanto alla prima, io crederei che la mia apologia fosse in quel luogo del *Prodromo*, che tratta delle salamandre, e molto più si renderà manifesta nella Memoria che pubblicherò su di esse. Qui adunque negli sperimentali miei esami io teneva presso a poco quel metodo, che ho praticato nelle lumache. La prima cosa era quella d' istruirmi esattissimamente delle molte, e diverse parti, onde composte sono le gambe, e le code di questi animalucci; poscia mi faceva ad esaminare con pari attenzione, se queste parti tutte si rigeneravano nelle nuove membra. E quanto alla riproduzion delle code, io vedeva che la Natura operava di questo modo. Sul troncone della coda tagliata cominciava ad apparire una specie di picciolissima lingua, simile in miniatura a una glossopietra, ossia a un dente di cane carcaria. La lingua andava crescendo in lunghezza, e in grossezza, e a poco a poco acquistava la forma, e le dimensioni della coda recisa, e dopo un dato tempo le divenía simillissima. Internamente poi si vedeva fornita di vertebre ossee, di midollo spinale, di muscoli, di vene, di arterie, di nervi, di glandole, ecc., che sono appunto quelle parti medesime, onde era composta la coda tagliata.

Rispetto poi alle gambe recise, sul loro troncone si mirava dapprima un minutissimo cono carnoso, che in seguito andava crescendo, e dopo l' avere acquistata una data grandezza si diramava all' estremità in quattro sottili particelle, parlando delle gambe anteriori, e in cinque, parlando delle posteriori; nè si tardava molto ad accorgersi, che tai particelle non erano che le dita delle gambe, le quali dita appunto nelle anteriori sono quattro, e nelle posteriori son cinque. Intanto le gambe, e le dita riproducentisi andavan di più svolgendosi, e dopo un tempo più o men lungo si vedevano

compiutamente formate, e di esse, come pure della coda novella, le salamandre facean già quell' uso, che fanno di quelle che non sono state mutilate. L' organismo interiore nelle gambe novelle andava d' un perfettissimo accordo con quello delle vecchie, tanto nelle parti solide molli, quanto nelle parti solide dure, così che favellando di queste ultime le gambe risabbricate manifestavano nè più nè meno quel numero di officini, che trovato io avea nelle vecchie. Le verità fisiche che qui accenno, e moltissime altre analoghe, che tralascio per brevità, sono state tutte pienissimamente confermate da diversi valenti Naturalisti, ma in ispezieltà dal Sig. *Bonnet* in tre sensatissime sue Memorie sul riproducimento delle membra nelle salamandre (*a*). E mi lusingo bene che i savj ed imparziali lettori dal fin qui esposto conosceranno chiaramente, che quando scopersi io il primo, e pubblicai che le salamandre acquajuole riproducono le membra perdute, io aveva ragione; e che quando il Sig. *Adanson* cercò d' impugnarmi, e di farmi comparire poco buon Fisico, egli avea il torto.

Accordo di buon grado al dottissimo mio Avversario, che dopo la mutilazion delle salamandre, in luogo di code, e di gambe non abbia egli mai veduto riprodursi, che moncherini, che massette carnose. Ma è ella questa una logica conseguenza, che dunque gli altri che dicono di aver vedute queste code, e queste gambe rifatte, hanno preso abbaglio? O non è anzi più logico il dire che l' abbagliamento sia tutto suo? Conciossiachè tenendo dietro a quel suo sbozzo di esperimenti non è difficil cosa l' accorgersi dove l' errore abbia avuta sua origine. Quel corpicciuolo che pullulava sul troncone delle gambe recise, chiamato *moncherino* (moignon) dall' Accademico Parigino, non era in realtà che il principio della gamba novella, ma non ancora sviluppatosi a segno di avere la configurazione di gamba. Quindi volendo giudicar dall' esterno, quel moncherino si sarebbe creduto meno una gamba, che una massetta inorganica di carne *une masse de chair non organisée*, siccome tale viene appellata da questo

(*a*) L. c. T. V. Part. I.

Naturalista. Di fatto il Sig. *Bonnet* adopera lo stesso vocabolo *moignon*, quando vuol denotare il principio della gamba riproducentesi. Aveva dunque trovato il Sig. *Adanson* un filo sicuro che lo poteva condurre ad ammirare que' medesimi riproducimenti, che il Sig. *Bonnet*, ed io abbiamo ammirati; ma questo filo se lo lasciò presto scappar di mano. Questo poi fosse, o perchè dopo l'aver veduto quel moncherino, non si curasse di cercare più in là, persuaso forse in mente sua per l'analogia delle lucertole, che la Natura riprodotto non avrebbe di più, o perchè anche per la poca cura usata alle salamandre, fossero queste perite innanzi di manifestare riproducimento ulteriore. Comechè sia, la verità è che intanto le sue sperienze ebbero un reo successo, in quanto che non usovvi attorno quello studio, quella diligenza, quell' assiduità che esigeva l'importanza del soggetto, e da cui come valoroso Fisico non doveva esimersi.

Passiamo al secondo capo di accusa, sperando d'essermi giustificato abbastanza del primo. Il Sig. *Adanson* adunque me agramente rampogna, e fammi altamente sapere che la riprodotta coda nelle lucertole, la quale non rigenera mai le vertebre ossee, doveva ammonirmi che neppur queste vertebre ossee, e in conseguenza una verace coda non si rigenera mai dalle salamandre.

Supplico d'un benigno perdono questo insigne letterato, se ardisco asserire che in questa sua rampogna io trovo lo strano innesto di due errori, senza saper dire sì facilmente se l'uno sia minore dell'altro. Primieramente adunque dalla non verace riproduzione nelle lucertole egli argomenta la non verace riproduzione nelle salamandre. Ma quale è quel Fisico sì inavveduto, sì inesperto che argomentato mai abbia di questo modo nel gran soggetto delle riproduzioni animali? Una immensità di animaletti, singolarmente acquajuoli, per la semplicità dell'organismo ha moltissima somiglianza co' polipi. Siccome pertanto assaissimi di quelli non riproducono, così non dovrebbono riprodurre pur questi, se valesse l'argomento analogico del più volte lodato Naturalista. Quanto all'essenziale dell'interna struttura, non evvi differenza tra specie e specie di lumaca terrestre, secondo gli esattissimi esami dello *Swammerdamio*. Trovato avendo io dunque che in diverse spe-

cie non si ottiene la riproduzione, neppur questa si dovrebbe ottenere nell' altre. E così continuando a far uso di quell' argomento in altri animali, noi passeremmo con la maggiore facilità del mondo di errore in errore.

In secondo luogo nel favellare delle lucertole suppone il Sig. *Adanson* come un fatto dei più incontrastabili, dei più sicuri, che le loro code vadan composte di vertebre ossee. Dio immortale! Quel Naturalista che nel riprendermi dice d' essere incanutito su lo studio, e su le notomie de' minuti animali (*a*), non aveva dunque a' suoi giorni veduta una sola coda di lucertola? Imperocchè se veduta l' avesse, come sarebbe mai incorso in simile errore? Qui adunque permetta il correttore d' esser corretto, col rispettosamente istruirlo, che la coda delle lucertole non è altrimenti corredata di vertebre ossee, anzi neppur di vertebre, ma sibbene d' una quantità di muscoletti dall' un canto e dall' altro piramidali, strettamente insieme combaciantisi; e attorno attorno fasciati da una sottile membrana fatta a anelli, che a formar viene l' esteriore della coda. E per quanto si frughi dentro di questa coda o con l' occhio nudo, od anche armato, non è possibile di rinvenirvi la più picciola particella ossea. E se il Sig. *Adanson* non volesse prestar fede a' miei detti, senza uscir di Parigi si faccia recare una di quelle lucertole grigie, dette *parietarie* da alcuni, per esser solite nella buona stagione a correre su le pareti delle case, oppure uno di que' lucertoloni verdi, che soggiornano nelle campagne ed anche dentro degli orti, e dei giardini, e che da' Toscani si appellan *ramarri*, e da' Francesi *lezards verds* (che è appunto quella specie, di cui favella l' illustre mio critico); si prenda egli stesso la pena di esaminar la coda a queste due qualità di lucertole, e si avvedrà poi se sono io che m' inganno, oppur egli.

Stupiranno facilmente i miei lettori, che un *Adanson*, che è quanto dire uno de' più riputati Naturalisti della Francia, caduto sia in tanti sbagli, ed errori. Si è veduta la maniera da lui prescritta nel decollar le lumache, maniera che sem-

(*a*) Veggasi la più volte citata lettera de' 30 Luglio 1769 scritta al Sig. *Bonnet*.

bra espressamente inventata per farle morire, non riprodurre, e ch' io non so se possa venire in mente a nessuno ingenuo ed onesto Filosofo, che senza privato interesse, senza passione va in traccia del vero. Si è veduto come al di grosso si è ingannato intorno alle salamandre col prendere, e con lo spacciare per un corpo informe, un corpo non organico ciò che era un verace rudimento di gamba, o di coda. Si è veduto come stranamente ha abusato dell' analogia sul proposito delle lucertole riferite alle salamandre. Si è veduto in fine come sia andato errato nel voler ragionare dell' organismo della coda nelle lucertole, senza avere la più picciola cognizione di tale organismo. Senza fallo che in vista di tutti questi sbagli stupiranno grandemente i miei lettori. Ma lo stupore più grande a mio avviso sarà, come a tanti sbagli unito abbia il mio Avversario tanta confidenza, non osando io dir tanto orgoglio. Quando nel 1778 egli scriveva al Sig. *Bonnet* sul proposito delle lumache, essendo già a stampa la maggior parte degli scritti favorevoli alle mie osservazioni, ei non poteva ignorar questi scritti. Se con mente disappassionata e libera da' pregiudizj si fosse presa la pena di pesatamente considerarli, aveva egli un' occasion troppo bella di non lusingar tanto le idolatrate sue idee, di ragionevolmente diffidare delle proprie esperienze, e forse ancor di ricredersi. Veder doveva che tra' miei favoreggiatori vi erano uomini di primo ordine, uomini che godono della confidenza del pubblico, e che posto hanno il suggello dell' immortalità alle sperimentali loro fatiche. Aveva egli dinanzi agli occhi le giudiziose osservazioni di alcuni suoi illustri Colleghi, registrate negli Atti della Reale Accademia, quelle in ispecie de' Signori *Herissant*, e *Lavoisier*, che d' un modo sì convincente, sì luminoso confermano la realtà de' contrastati riproducimenti. Ma a dispetto di queste palpabili dimostrazioni il Sig. *Adanson* ben lontano dal riconoscere i proprj errori, si è riconfermato ne' medesimi, e persuaso d' essere stato quel solo che su tale materia osservato abbia, e ragionato dirittamente, ha con sorpresa de' buoni Fisici accagionato gli altri che non sentivan con lui, qual gente inetta per le sperienze, e me sopra ogni altro, onorandomi insieme col gentil nome di venditore di falsi miracoli, e di chimere. Questa sua noncu-

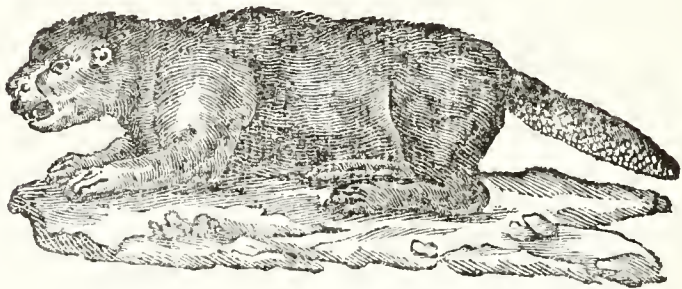
ranza però, e questi suoi dispregi per me, non saranno mai una ragione, onde sminuire nell' animo mio quella sincerissima stima, che professo al non vulgare suo merito; e se quando ha contraddetto ad alcune mie sperienze, ho fatto vedere che si è ingannato, non ho avuto altro in mira che difendendo me stesso di patrocinare la verità.

Terminiamo la presente Memoria con una riflession generale. Una delle principali apparenti ragioni, per cui si è tanto messa in dubbio, ed anche assolutamente negata la mia scoperta sul riproducimento della testa nelle lumache, si è quella a mio avviso, perchè tale scoperta risguardava appunto la testa. Se si dica essere stato trovato un animale che ha la facoltà di riprodurre le gambe, di riprodurre la coda, e che queste gambe, questa coda non sono già d' una semplicissima struttura, come quelle di molti insetti, ma presso a poco composte come quelle dei quadrupedi, non v' ha dubbio che non possiamo non esser tocchi di maraviglia. Ciò non ostante la cosa non sembra a noi del tutto impossibile. Ma se riferito ci venga essere stato scoperto un altro animale, che tagliandogli il capo, sa riprodurlo, e che questo capo ha occhi, e bocca, e mascelle, e denti, e lingua, e nervi, e cervello, non solamente ne meravigliamo, ma la fantasia stordisce, s' impunta, si ributta, e quindi ci sentiamo disposti a giudicare un tal fatto più favoloso, che veritiero. Volendo noi rintracciar l' origine di questa ritrosia, di questa incredulità, è facile l' accorgerci appoggiarsi tutta all' analogia. Abituati dall' infanzia a vedere certi animali, tra mezzo a' quali del continuo viviamo, come sono molti quadrupedi, molti uccelli, molti rettili, molti amfibj, molti insetti, dalle idee particolari di questi diversi generi formiamo l' idea generale dell' intiera massa degli animali. Dal veder dunque che se a un cane, per atto d' esempio, a un colombo, a una serpe, a una rana, a una mosca venga recisa la testa, questi animali ben lungi dal rifabbricarla, sen muojono, pensiamo che lo stesso debba succedere a una lumaca, e a qualunque altro vivente. Così giudica il popolo, e quella parte di letterati, che nelle filosofiche materie non sente più alto del popolo; ma non così il vero Fisico, non così il vero Naturalista, quegli che letto avendo quanto da prodi Indagatori

è stato

è ſtato oſſervato nell' illimitato regno degli animali, vede per tutto anomalie, per tutto eccezioni, e quanto per conſeguenza l' analogico argomento poſſa eſſer fallace. Maraviglierà egli bensì all' udir queſto fenomeno, come non poſſiamo non maravigliare all' udire qualunque altra inaſpettata novità, ma non per queſto negherà la poſſibilità del medeſimo, pel numero troppo grande di altri fatti niente meno in apparenza ributtanti di quello delle lumache, e ciò non oſtante veraciſſimi. Tali ſono i prodigj dei polipi, de' lombrichi terreſtri, di alcuni vermi d' acqua dolce, quelli de' gorgoglioni, de' gallinſetti, de' rotiferi, delle libelle, delle fecondazioni artificiali, e tanti altri analoghi, che ſembrano eſſere più veroſimili che veritieri. Quanto adunque nel filoſofare ſi ſono allontanati dal vero Fiſico, dal vero Naturaliſta quegli autori che hanno meſſa in dubbio queſta riproduzione pria di cercare di verificarla col fatto, come un *Bomare*, che comincia con queſte parole sì poco degne d' un Filoſofo: *Io confeſſo che non potendo credere a queſta riproduzione ho tentato molte eſperienze ſu queſto ſoggetto* ecc. (*a*): e un *Adanſon* che in termini niente diverſi dà principio alla lettera ſcritta al *Bonnet*: *Ho cominciato a dubitare filoſoficamente il primo intorno alla rigenerazione della teſta, delle corna, e delle mandibole delle lumache*. E rifleſſivamente conſiderando noi quanto ſu tale ſoggetto è ſtato pubblicato dagli altri miei riveriti Contraddittori, ſi vede ſpirare in tutti o quaſi in tutti una cert' aria di diffidenza, di dubbietà, che non laſcia celare che quando co' loro tentativi ripetevano i miei, erano già ſvantaggioſamente prevenuti verſo di eſſi. Ed io non penerei molto a credere, che queſta sfavorevole prevenzione ſia ella pure concorſa a rendere infruttuoſi que' loro ſaggi ſperimentali, in quanto che nel farli, ſiccome non erano troppo bene diſpoſti a riceverne un felice ſucceſſo, non vi hanno peravventura poſta attorno quella diligenza, quell' intereſſe, quello zelo, che tanto ſono neceſſarj perchè le ſperienze vengano a bene; e chi ſa ſe nel raccontare i riſultati di queſti ſag-

(*a*) Articolo: *Lumaca*, del ſuo Dizion. ed. del 1776.

gi hanno pure usato di quella lealtà, di quella schiettezza, che esigeva l' amore del vero? Le prevenzioni tanto contrarie che favorevoli per qualche sistema, per qualche teoria, per qualche pensamento, sono per lo più state fatali per le osservazioni, per le sperienze. Ed io se qui mostrar lo volessi, non sarei imbarazzato che nella scelta degli esempi. Quando ci facciamo ad interrogar la Natura ci è d'uopo l'esser liberi d'ogni pregiudizio, d'ogni passione, che la vista appanna, nè ci lascia apparire la bella faccia del vero; e con amica indifferenza dobbiamo esser giudici tanto contra degli altri, quanto contra di noi. Che se per l' opposito saremo preoccupati da desiderj, da diffidenze, da dubbj, e da altrettali intempestive affezioni, mireremo le esperienze da quella parte che favoreggia qualche nostro gradito pensiere, non dall' altra che può contrariarlo, giudicheremo non rettamente di esse, ed in vece di accrescere alla Fisica il tesoro delle utili verità, accresceremo il numero degli errori.

LETTERA PRIMA

RELATIVA A DIVERSE PRODUZIONI MARINE

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore di Storia naturale nell' Università di Pavia

Al Sig. CARLO BONNET Membro delle più illustri Accademie di Europa,

Scritta il giorno 15 *Gennajo* 1784 *Pavia*.

SApendo voi, amatissimo ed illustre Collega, il piacere che io provo nell' intraprendere nelle nostre estive vacanze qualche picciol viaggio filosofico, o a fine di accrescere di qualche rara produzion naturale questo pubblico Imperiale Museo della Regia Università di Pavia, o mosso dal desiderio di fare acquisto di cognizioni novelle, obbligantemente voi mi chiedete quai luoghi io abbia scorsi, ed esaminati la state passata, e quale sia stato il frutto di questa recente peregrinazione. Non differisco a soddisfare, come per me si potrà, le erudite vostre brame, e tanto più volentieri mi affretto di farlo, quanto che questa sarà per me un' occasion favorevole, onde trarre ulteriori lumi, e dottrine da un letterato a me sì caro, e a cui tanto debbo, e che da lungo tempo l' Europa tutta venera e onora come uno de' più gran Genj del secolo. Sul finir della lettera da me indirizzata l' anno scorso al Sig. Marchese *Lucchesini*, Ciamberlano di S. M. il Re di Prussia, la quale io ebbi il piacere di comunicarvi, avrete facilmente compreso quale soave e forte impressione abbia fatta sul mio spirito il mare, dappoichè ho avuta l' occasione di scorrerne rapidamente qualche tratto; e quale accesissimo desiderio abbia in me lasciato di visitarlo di nuovo; argomentando io da quelle poche, ma bellissime e utilissime cognizioni che allora ne ebbi, quale sarebbe stata la copia

che tratta ne avrei, se riosservato lo avessi con maggior agio (*a*). Da ciò non penerete molto a inferire qual genere di occupazioni trattenuto mi abbia la scorsa estate, le quali appunto in gran parte hanno versato sopra oggetti marini, sissata avendo a tal fine la mia dimora a Portovenere su la riviera di levante di Genova, per essere un paese contiguo al golfo della Spezia, tanto famoso nelle storie sì antiche che moderne, e tanto degno di esserlo pel sicuro asilo che presta a' bastimenti d' ogni maniera, che dentro vi approdano, ma tuttinsieme adattissimo per la calma quasi continua che vi regna ad appagar le voglie degli avidi ricercatori. Quivi adunque soggiornai sopra due mesi e mezzo, senza però lasciar sovente di uscire dalle bocche del golfo, e co' legni pescherecci d' inoltrarmi in alto mare dalla parte di Livorno, e della Corsica; e durante quel tempo le produzioni marine furono il favorito mio oggetto; non ommettendo tuttavia l' esame delle adiacenti littorali montagne, e di alcune prossime isolette; e notando altresì le molte e varie circostanze che insieme concorrono a render quel golfo non men vago sopra ogni credere e dilettoso, che unico in tutta Europa. Sebbene stando io a Portovenere aveva di rincontro dalla parte di levante un altro grande oggetto, che a sè rapiva i miei guardi, e che in certa guisa invitavami a visitarlo. Delle vicine Panie io parlo, sì rinomate pe' nobilissimi carraresi marmi e massesi, onde in buona parte vanno composte. Dalle ricerche marittime passai adunque alle montane, esaminando non solamente quelle numerose antichissime cave, ma la stratificazione, la struttura, l' impasto delle materie, onde risulta quella grand' alpe. E siccome le Panie giacciono in vicinanza dell' Appennino, o a dir meglio sono un braccio continovato con lui, perciò dopo l' avere esaminate le prime, volli eziandio esaminare il secondo. E questa doppia disamina, ragguagliata anche a quanto era stato prima da me osservato in altri luoghi dell' Appennino, mi fornì diversi termini di confronto, che per l' Orittologo mi parvero interessantissimi.

Voi avete, illustre mio Amico, le traccie, e l' idea dell'

(*a*) Questa lettera è stampata negli *Opuscoli scelti* di Milano.

ultimo intrapreso mio viaggio. Ma voi di ciò non sarete sicuramente contento. Senza fallo che vorreste di più ch' io scendessi a' particolari, o almeno ch' io vi narrassi quanto di più notabile è stato da me osservato. Cercherò di ubbidirvi, non però in tutta quell' estensione ch' io vorrei, e che a voi forse non dispiacerebbe. Le produzioni naturali, in questa occasione da me esaminate, sono troppo numerose, troppo fra loro diverse, per poter essere esposte col dovuto dettaglio, e con gli opportuni riflessi in una sola lettera o in due, che anzi ne addimandan parecchie, le quali mi farò a scrivere, come avrò bastante ozio per esse. Adesso adunque per acquistare il merito di avervi ubbidito, non potrò far altro che ristrignere i risultati delle principali mie osservazioni in due lettere, la prima delle quali concernerà gli oggetti marini, la seconda i montani. Entro adunque senza più in materia, dividendo a maggior chiarezza l' una e l' altra lettera in tanti paragrafi, quanti sono gli articoli più importanti che a mano a mano andrò divisando.

§. I.

Luce notturna del mare.

Fino a' tempi più rimoti era stata osservata risplender di notte in moltissimi luoghi l' acqua del mare; e di un tal fenomeno sono poi state immaginate da' Fisici diverse spiegazioni, la più appagante delle quali sembra essere oggigiorno la seguente. Si vuole che tal luce derivi in parte da fosforici animalucci marini, scoperti già nelle Lagune di Venezia da' Signori *Vianelli*, *e Grisellini*, e nel mare dell' Indie dal Sig. di *Riville*; ed in parte da viscide materie oleose, onde abbondano le acque del mare, come ultimamente ha preteso mostrare il Sig. *Canton*.

Quanto agli animaletti fosforici, ossia alle lucciolette marine, io ho avuto tutta la comodità di osservare sì bel fenomeno. Non vi ho trovata la specie descritta dal mentovato Francese, ma bensì l' altra esaminata dai due Italiani. Ho di più il compiacimento di dirvi che ne ho scoperto cinque specie affatto nuove. I tre accennati Scrittori pare che abbia-

no posto quasi tutto il loro studio nel descrivere l' organica struttura di tali lucciolette, e il picciol fosforo che nell' acqua producono : due oggetti a dir vero molto interessanti, ma che tuttavia lasciano la storia di queste curiose bestiolucce assai tronca e imperfetta. Nelle mie cinque specie, oltre alla descrizione che darò di esse, e del lume loro soggettato a molti e variati cimenti per intenderne meglio le sue qualità, la sua natura, parlerò di altre circostanze che ho creduto non dover trascurare; se la loro luce, per atto d' esempio, si estende a tutto il corpo, o ad una parte soltanto di esso: se si manifesta del continuo, ovveramente a riprese: se, e quanto seguita ad aversi, estratti che sieno questi maravigliosi animalucci dall' acqua : quali sono i siti del mare che abitar sogliono : se hanno facoltà di nuotare, o se serpono soltanto su que' corpi, ne' quali si trovano : se trasferendoli dal mare all' aria periscono, ed in tal caso se ridonandoli al nativo elemento rivivono, come è prerogativa di qualche altro animale: se la naturale loro moltiplicazione si ottiene per via di uova, o di feti, o mediante altro mezzo, analogo a quello dei polipi. E questo è ciò che risguarderà quel genere singolare di minuti viventi, che co' loro splendori ci fanno apparire di notte tempo in più luoghi lucido il mare.

Per conto poi di quell' altra parte di luce, che si vuole generarsi in esso da pingui sostanze vischiose, prodotte dallo scomponimento di sostanze animali, io accordo al chiarissimo Sig. *Canton*, che oltre al fosforeggiamento creatosi nel mare dalle nostre lucciolette, ve ne sia un secondo affatto independente dal primo, anzi di gran lunga diverso; e a suo luogo mostrerò i caratteri che essenzialmente distinguono l' uno dall' altro, la qual cosa io non so che finora sia stata da nessuno avvertita; che anzi queste due luci, quantunque provenienti da principj diversi, facilmente si confondevano insieme. Ma non posso mica convenire con lui, che la cagione di questa seconda luce sieno diverse sostanze di animali (segnatamente di pesci) periti, e scomponentisi nel seno del mare. Egli è noto che la sua ipotesi si appoggia tutta alla lucentezza, onde si ornò l' acqua marina in diversi vasi, allorchè alcuni pochi pesci da lui riposti dentro di essa cominciarono a infracidare, e a scomporsi. Il prodigioso numero de' pesci spe-

cificamente diversi che pescansi in quel tratto di mare, dov' io mi trovava, era un' opportunità troppo grande per mettere alle prove cotesta ipotesi. Vero egli è dunque che qualche pesce vicino al corrompersi facea nell' ore notturne nascere nell' acqua marina riposta ne' vasi un chiarore che prima non v' era. Ma è vero egualmente che la massima parte di loro era inetta a produr questo effetto. Di più nel novero de' pesci non lucenti vi erano d' ordinario quelli che hanno molta pinguedine, e che secondo il più volte citato Inglese devono esser più idonei, nello scomporsi che fanno, a rendere l' acqua fosforica. Un' altra ragione, secondo ch' io giudico, fortissima si oppone a questa sentenza. Se quel brillare notturno del mare, che non dipende punto da lucciolette, fosse cagionato da sostanze oleose di pesci scomposti, siccome tali sostanze soprannuotano sempre all' acqua, chi non vede che tale brillamento esser dovrebbe superficiale? Che è appunto ciò che non si accorda col fatto. Imperocchè da replicate sicurissime esperienze che addurrò, voi vedrete, illustre mio Amico, che anche alla profondità di 40 piedi parigini il mare è fosforeggiante. E però io non peno molto a credere che a qualunque profondità sia pur tale. Il che essendo, si fa chiaro abbastanza essere tal luce una proprietà inseparabile dall' acqua marina, la qual proprietà fassi soltanto ora più, ora meno sensibile a norma della diversità de' venti, delle stagioni, e di altre circostanze, siccome dalle mie osservazioni parmi di aver potuto bastantemente raccogliere. Quale sia poi, od esser possa l' origine di un tal fulgore, io vi confesso con la mia solita ingenuità, che non saprei ora dirvelo con sicurezza, non avendo io su questo curioso fenomeno che conghietture, che mi riserbo di commettere all' esperienza la prima volta che rivedrò il mare.

§. II.

Penne marine.

E' noto che con tal nome vogliono designare i Naturalisti un genere singolare di piantanimali, per avere qualche rozza somiglianza con le penne dell' ali degli uccelli; al qual

nome senza veruna ragione è stata surrogata la barbara voce di *Pennatule* dal Cavaliere *Linneo*. Anche questi viventi sono fosforici, favellando almeno di alcune specie, quale si è la penna marina *grigia*, e la penna marina *rossa*. Ma prima di farmi a dire della loro qualità fosforica, toccherò alcune mie osservazioni, che mi sembrano atte a dilucidare qualche punto controverso, relativo alla struttura, e al naturale di questi piantanimali.

Vuole il *Pallas* su l'autorità dell'*Ellis* ch' essi sieno sprovveduti di bocca, o almeno d' un foro analogo. Ma il vero è che un tal foro vi esiste benissimo, e trovasi in entrambe le spezie situato all' estremità del gambo della penna, pel qual foro entra l' acqua, e ne esce sotto forma d' un picciol zampillo. Non nego però che l' animale possa anche valersi, e si valga di fatto di moltissimi altri forellini per attrar dentro sè l' acqua, e con essa il necessario alimento, voglio dire delle boccucce de' polipi, onde abbonda la parte opposta al gambo, la quale chiamerò *piumata*, per esser simile in qualche modo alle piume. E favellando di questi polipi, siccome ho potuto esaminarli vivi, e a lungo, e in assaissimi di questi piantanimali, così crederei di avere ampliata la loro storia, che fino adesso si può dire nascente.

E' stato creduto che le penne marine si trasferiscano da sito a sito nel mare; e ciò si è inferito da alcuni contorcimenti, e moti parziali del loro corpo, senza però che nessuno, a quel ch' io mi sappia, le abbia mai vedute muoversi progressivamente. La comodità di averne molte a mia disposizione, e di poterle osservare senza che uscisser dell' acqua marina, mi ha reso più fortunato degli altri. Ho adunque nelle due penne, rossa, e grigia, veduto chiaramente questo movimento locale, picciolo in vero e lentissimo, ma bastante a darvi un' idea che questi piantanimali sono esseri vaganti dentro del mare. Non lascierò di descrivere come eseguito venga cotal movimento. E questa facoltà *loco-motiva* contradistingue i nostri piantanimali da tanti altri, quali sono le gorgonie, le madrepore, le millepore, gli alcionj, de' quali più sotto dovrò parlare, i quali tutti immobilmente fitti rimangono a' siti del mare, dove son nati, nè in loro si scorge verun altro moto, che quello de' polipi che per certi forellini

rellini o cellette escono dal corpo di questi piantanimali, e a lor talento si nascondono dentro di essi. Per l' opposito le nostre penne, oltre al movimento particolare de' loro polipi, hanno quello di tutto il corpo; e quindi si possono considerare, non senza nostra sorpresa, come un grande animale, su cui in certa guisa innestati sono tanti altri piccioli, quanti sono gl' innumerabili polipi, di che si adorna.

La moltitudine da me trovata di queste penne mi ha eziandio fatto scoprire come si sviluppano, e crescono, il qual fenomeno non era stato conosciuto da que' Naturalisti, che favellato hanno di esse, probabilmente per averle sempre trovate già sviluppate, e cresciute.

Ma passiamo a far parola del loro fosforeggiamento, attissimo egli pure per le novità che comprende a piccare la nobile vostra curiosità. Voi sapete che era già noto, che tanto la penna grigia, quanto la rossa risplendono vive nell' ore notturne dentro del mare. Quindi da alcuni Sistematici sono anche state appellate penne *fosforiche*. Il fatto è verissimo, ma questo fatto abbisogna di schiarimento. Se adunque le nostre penne resteranno immote nell' acqua marina, non risplendono nè punto nè poco. Solamente la luce accendesi in esse, ogni qualvolta vengono mosse: questa mozione poi o sia loro propria, o venga cagionata dall' urto dell' acqua. Di più non risplendono solamente vive, ma anche quando sono morte: basta solamente toccarle, e il fosforo brilla egualmente fuori dell' acqua, che dentro. Poco dopo però che è cessato il moto nelle penne, prodotto dal toccamento, si spegne ogni luce; sebbene, toccandole di nuovo, non lascia di ricomparire. E qui vedete come il moto sia una condizione per aversi la luce in questi esseri organici, quando tal condizione non è punto richiesta in tanti altri. Saprete quel che riferisce il *Bartolino* di una seppia (*a*), la quale aprendola mandava un lume sì copioso e sì vivo, che allontanata di sera la candela, parea ne avvampasse tutto il palazzo. Il Mediterraneo che abbonda di questi *molluschi* mi ha fornita più

(*a*) Sepia octopodia. Linné Syst. Nat.

d' un' occafione di cercar di avverare queſto prodigio, che ſenza ulteriori eſami ſembra adottarſi dal celebre *Linneo* . A dir vero non ha corriſpoſto alla mia eſpettazione. Una luce però aſſai forte ſi è qualche volta prodotta: e ciò che ora fa al caſo ſi è, che la medeſima era belliſſima, ancorchè le ſeppie già morte non ſi toccaſſero punto, nè ſi moveſſero. E un ſomigliante fenomeno mi accadeva pur di vedere in que' pochi peſci, de' quali ho ragionato più ſopra (§. I.), della cui luce, come di quella delle ſeppie dovrò a ſuo luogo parlare con qualche dettaglio.

Ma ritornando alle penne marine, io oſſervo che quegli autori che incidentemente hanno ſcritto della loro luce, non ci dicono punto ſe queſta occupa tutto il loro corpo, o una porzione ſoltanto; eppure era queſta una circoſtanza da non tacerſi. Dirovvi adunque che quando ſon vive o morte da poco tempo, il gambo della penna non appariſce mai lucido, ma la parte ſoltanto piumata. Sebbene neppur queſta lo è per tutto egualmente. Ma voi non indovinerete forſe sì facilmente dove riſegga la maggiore intenſità della luce, o a dir meglio dove tragga la ſua ſorgente. Sapete voi dunque dove tal luce emana precipuamente? Dai polipi. Quanti adunque ſono eſſi di numero, tanti ſono i lumicini bianco-cerulei che brillano; e il loro brillare è tanto vivo, che di notte dal lume di candela poco rimane eccliſſato. Toccando poi i lembi della parte piumata, ſcorre tal lume rapidamente dai polipi verſo il mezzo di lei. Nel mio libro fermerò alquanto la penna nel deſcrivere queſto fenomeno, e allora dimoſtrerò che la luce de' polipi ſi eccita in grazia di una materia mucoſa, di che abbondano. Ecco adunque come alle tante portentoſe prerogative di che godono i polipi, ſi aggiunge quella d' eſſer fosforici, parlando almeno dei preſenti. Se poi le penne già prive di vita continuino a ſtare per più giorni nell' acqua (giacchè eſpoſte all' aria, d' indi a non molto ſi ſeccano, e del tutto perdono il fosforeggiamento), cominciano internamente a ſcomporſi, e ſcomponendoſi a convertirſi in un viſcidume, occupante tutta quanta la porzione piumata, il qual viſcidume quantunque volte col dito o con altro ſi tocca, di oſcuro che era improvviſamente sfavilla.

Ho detto più ſopra che eſſendo le penne nell' acqua, que-

sta s' insinua su pel foro situato all' estremità del loro gambo. Ogni penna, sia grigia o rossa, dopo qualche tempo s' imbeve talmente di cotal fluido, che da fondo a cima ne rimane satolla. Se allora se ne estragga una dall' acqua, e si comprima con la mano la parte piumata, lasciando libero il gambo, schizza dal mentovato foro un rigoglioso zampillo; e se l' esperimento si faccia nelle tenebre, il zampillo rappresenta una picciola, ma luminosissima fontana, la quale se venga a rompere su la mano, o su i panni, li tinge di un vaghissimo colore argentino; se poi cada sul pavimento, vi crea a poco a poco un laghetto di candida luce.

Un fosforo così nobile, quale si è quello delle nostre penne, meritava ch' io cercassi di conservarlo a lungo, mentre sciogliendosi esse a poco a poco nell' acqua, in capo a pochi giorni sparisce. Note vi sono le premure, e lo studio del celebre nostro Italiano *Beccari*, per conservar buona pezza la luce delle foladi, quantunque al certo lungamente inferiore a quella delle penne marine. Curioso non solo, ma eziandio utile alle fisiche mie ricerche si era un secondo tentativo, contrario al primo, cioè quello d' indagare con quali mezzi veniva a spegnersi un sì bel fosforo. Ma sopra ogni altro l' investigazione dell' indole, e delle qualità della materia producitrice di questo fosforo, impegnar doveva i miei riflessi: e se tale o analoga materia sia pur quella che rende fosforici tanti altri viventi marini, così che si potesse peravventura avere fondamento di credere, che il principio producente in loro tal luce fosse generalmente un solo. Ed avendo rapporti troppo diretti tutti questi viventi marini con le lucciole terrestri, non si poteva quasi entrare in un maturo e filosofico esame dei primi, senza farsi ad esaminare ancor le seconde. Attorno a queste ricerche mi sono adunque esercitato; e parlando delle lucciole marine, e de' polipi fosforici, le une e gli altri mi hanno abbastanza instruito in qual conto debba tenersi l' opinione del chiarissimo Professore *Forster*, pensante che l' interrotto lucicamento di certi vermi terrestri dipenda dall' inspirazione, e dall' espirazione dell' aria (*a*).

Hhhh ij

(*a*) Rozier 1783.

§. III.

Alcionj.

Questo genere di piantanimali, per quel lato con cui guarda i vegetabili, ha con loro maggiori relazioni di quel che abbiano le penne marine, sì perchè nel mare trovasi sempre radicato, sì perchè alcune sue specie sono corredate di tronco, e di rami, quale si è l'alcionio *palmato*, detto da alcuni *mano marina*, di cui ora prendo a parlare (*a*). Quel tratto di mare che guarda il mezzodì, e che è posto in dirittura del golfo, abbonda di questa specie di alcionj, e per lo più si pesca in compagnia delle penne rosse, e grigie, cioè a dire alla profondità di 200 piedi d' acqua, ed anche di vantaggio. Dice il *Pallas*, che essa nasce su gli scogli, e su le conchiglie. Ciò è verissimo, purchè non pretendasi esser questa una condizione necessaria al suo nascimento, mentre l' alcionio palmato nasce, e cresce egualmente sul fondo terroso del mare.

Questo piantanimale, quando si pesca già adulto, è ramoso. Ma è egli tale quando nasce, oppur semplice? Lo scioglimento di tal questione, come d' infinite altre, indarno lo avrei cercato su i libri. Per averlo ho dovuto consultar la Natura.

Quantunque i nostri alcionj non abbiano tutti un colore, ma altri sieno più o meno rossi nei rami, altri cenerognoli, altri bianchi, ciò non ostante io non li giudico specie diverse, per essere la loro conformazione, e la loro struttura simılissima in tutti, e per osservarsi pure la stessa cosa ne' loro polipi, comechè questi pure sieno partecipi del colore dell' alcionio, a cui appartengono. Questi curiosi animalucci, creduti già dal *Marsilli*, e descritti come veraci fiori, hanno

(*a*) Il *Linneo* che innumerabili volte cangia a capriccio i nomi alle produzioni naturali, chiama questo alcionio *exos*, senz' osso. Vero è che gli alcionj in generale considerare si possono piantanimali senz' ossa, come saviamente riflette il *Pallas*, per andare sprovveduti di quella sostanza dura, che si trova in tanti altri piantanimali. Ma la voce *exos* in tal caso è generica, e perciò malamente ad una sola specie si adatta.

per preferenza impegnata la mia attenzione. Quando l' alcionio si tira fuori del mare, si nascondono tutti nelle lor cavernette. Non è però che in seguito non tornino suora, con questo solo divario, che seguitando a restare l' alcionio all' aria, non si presentano che sotto forma di papille o bottoncini; laddove rituffando l' alcionio nell' acqua marina, ne escono benissimo, e spiegano i loro braccini, somigliando ciascheduno allora ad un vago fioretto ottopetalo. Agitando però forte l' acqua, si ritirano, e si perdono quasi di vista, e lasciandola quetare, tornano a farsi vedere. Se poi l' alcionio seguirà a restare nell' acqua senza mutarla, quell' esercito di polipi cessa di vivere, rimanendo però ciascuno in massima parte fuor della propria celletta, come fa una lumaca terrestre fuori del guscio, se si obblighi a morire nell' acqua.

Quantunque il dottissimo *Pallas* nel sugoso suo Trattato de' piantanimali dica che gli alcionj vengon dall' uova, io non veggo però che lo mostri mai nel descriverne tutte le specie finora conosciute. Quindi io opino che egli asserisca ciò, più per l' analogia di altri piantanimali, che nascon così, che per avere qualche fatto che lo comprovi. E però io quasi oserei asserire d' essere stato il primo a scoprire le uova negli alcionj palmati. Quale adunque sia la loro forma, e grandezza, in qual parte del piantanimale risseggano, da qual sito ne escano per nascere, saranno questi i punti ch' io mi proporrò di discutere.

L' effetto luminoso che producono le penne marine nol producono gli alcionj: anzi dirovvi, per non averlo inutilmente a ripetere, ch' elleno sono le sole fra tutte le produzioni polipifere da me esaminate, che godono di questa prerogativa.

Ma oltre all' alcionio palmato, ne ho scoperta un' altra specie differentissima, da me non trovata da altri descritta. Non può negarsi che sia un vero alcionio, avendone tutti i caratteri, ma è privo de' polipi, non ostante che abbia quelle stelluzze su la sua superficie, che sogliono essere le boccucce o le aperture, per dove escono questi picciolissimi viventi. Nè accorto mi sono che altra parte del suo corpo dotata sia del più picciolo indizio di senso, o di moto. In rigore adunque non può questo dirsi un piantanimale; e

però ſi vede che la natura nel formar gli alcionj non ha ſempre infuſo in loro un principio ſenziente.

§. IV.

Millepora Retepora.

Non per altro prendo io brevemente a parlarvi di queſto piantanimale, detto non impropriamente da alcuni Franceſi *Manichino di Nettuno*, per avere qualche ſomiglianza co' manichini di merletti, ſe non ſe per accennarvi di avere trovati in eſſo i ſuoi polipi. Sono prodigioſamente minori di quelli delle penne marine, e degli alcionj, ma laddove queſti ſi oſſervan dotati d' una vita ſenſitiva torpidiſſima, in tanto che eſcono con infinita lentezza dalle loro cellette, e con lentezza quaſi eguale vi entrano, nè ſi determinano ad entrarvi ſe non ſe quando o vengono irritati, o l' acqua dove ſono immerſi ſia molto agitata; i polipi per contrario della millepora retepora ſono d' un ſenſo vividiſſimo, così che ad ogni lieviſſimo tremito dell' acqua ſi naſcondono di preſente nelle loro cavernette, ſenza però laſciare di tornar ſuora, ceſſato il commovimento. Numeroſi ſono i loro braccini, e vengono talvolta à formare quaſi un imbuto, cha ha l' apice all' apertura della cavernetta.

Queſta millepora ſi peſca in fondo al mare a non molta profondità, e naſce, e ſi attacca dove che ſia.

§. V.

Madrepora.

Malgrado la quaſi infinita diverſità delle ſpecie, che dai Naturaliſti riferita viene, e deſcritta di queſta marina produzione, tanto ſomigliante per la qualità della materia, onde è compoſta, al corallo volgare; e malgrado i giudizioſi ſoſpetti dell' *Imperato*, e le aſſerzioni del *Rumſio*, e del *Peyſſonel*, che una tal produzione appartenga al regno animale; certa coſa è però che a confermazione di tutto ciò noi non abbiamo finora che una ſola oſſervazione, laſciataci dal *Donati*, per la quale

chiaramente apparisce, che la madrepora detta *ramosa* alberga i suoi polipi, come è proprio di tanti altri piantanimali. In sì grande inopia pertanto di osservazioni non crederò far cosa discara al pubblico versato in queste materie, nè a voi, se al fatto del celebre nostro Italiano ne accoppierò un mio proprio, appartenente alla madrepora *calycularis*, come la denomina il *Pallas*, o *a bottoncini*, come la potremo dir noi. In que' fondi marini adunque dove trovansi le millepore retepore si trova pur la madrepora a bottoncini, formante molti gruppi di cilindri corallini d'un bianco sudicio, grossi quanto una penna da scrivere, insieme strettamente attaccati, quali più numerosi, e quali meno, e questi gruppi non sono mai radicati a scogli o a pietre, o ad altro corpo stabile, ma giacenti semplicemente sul sango. Ogni gruppo fa corpo da sè, e quanti sono i cilindri, tanti sono i polipi che dentro vi abitano, quando questi però o per vecchiaja o per altro non sieno periti, raro non essendo il trovar molti di questi gruppi spogliati affatto di abitatori. Ciascun cilindro alla sommità è tronco, e quivi pronfondasi in un picciol calice, che riempiuto viene dal polipo, quando che esce. Questi polipi sono molto più grossi che quelli delle penne marine, e degli alcionj, ma somigliano però loro per la lentezza del moto. Perchè escano, e stendano i braccini, egli è sempre d' uopo che la madrepora si trovi nel nativo elemento. Così perchè campino a lungo dentro a' vasi, fa di mestiere cambiar l' acqua sovente, come dee praticarsi parlando degli altri piantanimali: ma non cambiandola, i polipi della presente madrepora soggiacciono a una vicenda, da me non osservata ne' polipi degli altri piantanimali. Se una penna marina, un alcionio, una millepora ecc., soggiornino sempre nella medesima acqua, i rispettivi polipi, quando periscono, rimangono tuttavia uniti alle loro cellette: per l' opposito diversi polipi della nostra madrepora partono da essa, e si trasferiscono altrove dentro all' acqua, quantunque però molti altri non si allontanino punto da' siti nativi. Questo passaggio di più polipi dalla madrepora ad altri luoghi, assai volte da me veduto, siccome è stato a me, così probabilmente sarà a voi di non leggiere maraviglia. Conciossiachè essendo così la cosa, parrebbe adunque che le madrepore altro non

fossero che semplici *polipari*, ossia nidi di polipi, a quel modo, per atto d' esempio, che i vespaj sono nidi di vespe; di maniera che siccome le vespe fanno un corpo da sè, independente affatto dal vespajo, così pronunciar si dovesse il medesimo di questi polipi relativamente alle madrepore; la qual opinione quantunque altre volte abbia avuto a fautori de' prodi Fisici, pure oggigiorno da' più limati Naturalisti viene rigettata, ammettendosi che i polipi sono talmente legati con le madrepore (e così dicasi di altre produzioni polipifere) che a formar vengono un tutto solo con loro : e questo è pure il sentimento vostro. Voi però sospendete intanto per poco i vostri giudizj, riserbandomi più sotto a ventilare con maggiore apparato di fatti questa importantissima questione, fino ad ora per quanto io ne penso, da altri non pienamente decisa. Noterò qui solo che quella separazione di alcuni polipi dalla madrepora mi è stata utilissima, in quanto che così separati, e liberi da qualunque impaccio, io ho potuto meglio osservarli, e farne eziandio qualche rozza notomia.

§. VI.

Gorgonie.

Posso dirvi che questa fatta di piantanimali è stata una delle principali cagioni di recarmi di nuovo sul mare. Sentite in pochi tratti, illustre mio Amico, come è ita la cosa. Nel Settembre del 1781 ritornando io da Marsiglia a Genova, dopo l' aver fatta in quella città di Provenza doviziosa raccolta di pesci ad uso del pubblico Reale Museo dell' Università di Pavia, ed essendomi un giorno, viaggiando sul mare, posto a leggere l' *Elenco de' Piantanimali* del Sig. *Pallas*, m' abbattei ad un luogo, scorrendo il quale, come buono Italiano, e affezionato alla mia nazione, non potei non concepire qualche sdegnuzzo verso il rinomatissimo Accademico di Pietroburgo. Cotal luogo risguarda le gorgonie, delle quali per avviso di lui sappiam così poco per l' imperdonabile trascuranza degl' Italiani. Sentite le parole stesse dell' autore, che non possono essere più gentili, nè più obbliganti. *Certiora & specialiora ex vivis Gorgoniis disci debent; quorum nos cognitione*,

cognitione, ob Italorum, quos maris Mediterranei divitiæ, in tanta vicinitate, frustra invitant, supinam negligentiam, hucusque carere dolendum est (*a*). Pur troppo debbo convenire col Sig. *Pallas*, esservi in Italia qualche città alle sponde del Mediterraneo, che potrebbe esercitarsi con lode nell' osservare filosoficamente le produzioni marine, e che si occupa di tutt' altro. Ma questa mancanza non è tanto nostra, che non vada anche a cadere sopra qualche altra nazione; e il nominato Naturalista, giacchè con cinica libertà così parla di noi Italiani, se era equo, non dovea risparmiare i Signori Francesi. Ma lasciati da parte questi odiosi discorsi, dirovvi che determinai allora (non da altro stimolato che da voglia d' imparare) di studiar le gorgonie, se peravventura scoperto ne avessi, e sopra tutto di far diligenti esami su i loro polipi, in evento che ve gli avessi trovati. E da Genova essendo io poscia passato in quel mese istesso al deliziosissimo golfo della Spezia, e su di esso avendo io un giorno gli occhi rivolti ad una ricca sorgente d' acqua dolce, che sollevasi sopra il livello del mare, della qual sorgente parlerò nella seconda mia lettera, vidi fortunatamente da un lato celarsi in poco fondo un numero ben grande di arbuscelletti, alcuni de' quali avendo io fatti estrarre dall' acqua, conobbi da qualche esame instituito su loro, essere le tanto sospirate gorgonie. Ma per la stagione inoltrata non potendomi io allora trattenere di vantaggio in que' luoghi marittimi, deliberai di rivisitarli a tempo migliore, nè questo da altre mie occupazioni mi è poi stato accordato che la prossima state passata.

Si sa che per gorgonie si vogliono intendere certe produzioni marine radicate cornee ramose, spinate alla base, vestite d' una molle corteccia, ricca di cellette e di forellini, da' quali si vuole che escano i polipi. Le gorgonie da me trovate sul fondo del golfo in vicinanza della mentovata fontana sono tutte d' una qualità; e quantunque per una moltitudine di picciole *verruche* che hanno alla superficie si accostino alla specie denominata *verrucosa* dal *Linneo*, e dal *Pal-*

(*a*) Pag. 163.

las, hanno però altri caratteri che a mio giudizio le rendon diverse.

Nel restante del golfo, anzi neppur fuori di esso non trovandosi questa qualità di gorgonia, ma solamente ne' luoghi prossimi a quella grossissima fonte, dove cioè l' acqua marina mischiata alla dolce è meno salsa, sarebbe mai la minor salsezza del fluido una condizione richiesta alla nascita, e all' incremento di questo piantanimale?

Gli alcionj, le penne marine, le millepore pullulano ne' fondi marini dove che sia. Le nostre gorgonie vogliono sempre per base una pietra. Nel tempo ch' io le ho esaminate, ne avrò tratto dal mare per ben dugento, e tutte quante erano tenacemente attaccate alla loro pietra. Di più quando il mare era tranquillo, e nel tempo stesso illuminato dal sole, ne vedeva sott' acqua, dove questa era poco profonda, degl' intieri boschetti, senza che mai una sola gorgonia si osservasse radicata alla nuda terra, o a qualche pianta subacquea. A riserva di non aver radici, ma di restare attaccate o piuttosto incollate al sasso con la spianata loro base, nel rimanente somigliano in picciolo a un albero sfogliato, avendo e tronco e rami e ramoscelli, e alla maniera pur degli alberi il tronco suole esser perpendicolare all' orizzonte, i rami poi, e i ramoscelli sono rivolti all' insù. Ne ha di varie grandezze, e le maggiori giungono in lunghezza fino a un piede e mezzo, e queste a proporzione hanno anche un intreccio di rami più numerosi e più larghi, le più picciole poi sono senza rami, e non arrivano tante volte a un terzo di pollice. Ma se le nostre gorgonie tanto somigliano nell' abito esteriore alle piante, hanno altresì con esse molti tratti di somiglianza nel loro interno, essendo corredate di corteccia, di legno, e di midollo. Solamente il corpo ch' io chiamo legno, e che è di mezzo tra la corteccia e il midollo, è di sostanza cornea, o almeno molto analoga al corno; e perciò non immeritamente venivano con greco vocabolo le gorgonie appellate *ceratofiti* dagli antichi, cioè *corna-piante*. Proccurerò di esporre con la dovuta precisione le osservazioni da me fatte intorno a questo triplice corpo, corticale, legnoso, e midollare. Qui noterò soltanto che la corteccia così del tronco che dei rami è sempre avvolta da una sottile buccia calcare.

Fin qui considerate abbiamo le gorgonie per quella parte, con cui sembrano collegarsi con le piante: passiamo ora ad esaminarle per l' altra, con cui s' intrecciano con gli animali, voglio dire entriamo a dare un cenno dei polipi che le abitano, riserbandomi poi a ragionarne in dettaglio nella mia Opera, massimamente per non essere stati descritti da altri prima di me. Tirata dall' acqua nativa una gorgonia, si mira nel tronco, e più assai ne' rami, e nei ramuscelli piena di picciole verruche, che esaminate alla lente si scorgono forate nel mezzo, e fatte a modo di stelluzze otrangolari allungate. Se la gorgonia continuerà a restar fuori d' acqua, non sopravverrà alle verruche novità alcuna; ma se metterassi di nuovo nell' acqua, allora dal foro centrale d' ogni verruca uscirà spontaneamente un corpicciuolo, che per essere più grossetto del foro stesso, lo obbligherà ad allargarsi; nè s' indugerà molto ad accorgersi che quel corpicciuolo è un polipo. Ha otto braccini, la sua figura è cilindrica, e finchè l' acqua rimane quieta, resta ognuno dei polipi fuori delle verruche; agitandola poi, o trasportando la gorgonia all' aria, si nascondono dentro di esse. Se quando vi sono nascosti, frugheremo con la punta d' un ago attorno alle verruche, troviamo i polipi rannicchiati nel fondo di esse, e pungendoli si contraggono vie maggiormente in se stessi. Sono grandicelli abbastanza per esaminarli, e disegnarli convenientemente.

Ma la discussione delle seguenti questioni doveva istruirmi di vantaggio su i polipi delle gorgonie, e su la loro economia. Che loro accade se la gorgonia matrice si stacchi dal sasso, sul quale è come incollata, lasciandola tuttavia dentro del mare? La vita de' polipi dipende ella dall' integrità della gorgonia, così che tagliandola in più parti sieno essi soggetti a perire? Oppure basta ad ogni polipo per vivere, che illesa rimanga quella porzioncella di tronco, o di ramo, dove egli si trova? Che avviene a questi animaletti, spogliando solamente la gorgonia o in tutto o in parte di sua corteccia? Reciso uno o più rami di una gorgonia, rimette ella novelli rami, come fanno le piante? Ho il compiacimento di significarvi che tengo dalla Natura la soluzione di tutti questi Problemi, e qui solo dirovvi che per riguardo all' ultimo, la riproduzione che si ottiene nelle gorgonie non è si-

mile a quella delle piante, le quali si sa che al di sotto del ramo reciso gittano rampolli novelli, ma piuttosto è somigliante a quella degli animali, in quanto che su la cima d' ogni troncone pullula un cono, come si osserva ne' lombrichi terrestri mutilati, e ne' vostri vermi d' acqua dolce. Qualora poi il cono è alquanto cresciuto, mette fuora egli pure lateralmente nuove verruche, e nuovi polipi.

Quantunque queste gorgonie non allignino, come già dissi, che in vicinanza di quella fonte, non è però che il golfo della Spezia non dia ricetto a qualche altra specie. Due altre certamente ve ne ho scoperte specificamente fra loro diverse. Quantunque la scarsezza degl' individui pescati non mi abbia conceduto il farvi attorno quella mano di osservazioni, che ho instituite nella gorgonia sopra descritta, mi trovo però averne bastantemente per poter ragionare con fondamento di sicurezza della natura di tali gorgonie, e di quella de' loro polipi.

Per sentimento del *Linneo* le gorgonie sono un parlante esempio del passaggio che fa un vegetabile in un animale; giacchè oltre all' avere esseno i caratteri di piante veraci, l' animata loro midolla si manifesta all' esterno in que' floridi animaluzzi, che chiamiamo polipi.

Per le mie osservazioni però credo di poter dimostrare quanto qui vada errato quel solenne Naturalista; e dir bisogna che quantunque vicinissimo al mare, veduto egli mai non avesse una viva gorgonia.

§. VII.

Spugne.

Riporremo noi nell' ordine de' piantanimali questa produzione marina? Così oltre al *Linneo* vuole il *Pallas*, pensante che le spugne sieno il termine della vita, e della natura animale, sostenuto da una lunga schiera di autori, che pretendono di avere in esse veduti non equivochi segni di senso, quantunque altri opinato abbiano contrariamente.

Le mie osservazioni versato hanno sopra due specie, che sono le sole da me vedute sul luogo, dov' io mi trovava. La

prima è una ſpugna arborea, belliſſima per l'intreccio de' rami, e per la finezza della ſtruttura, che ſi ſuol peſcare in alto mare alla profondità di 200, ed anche 300 piedi; l'altra è una ſpugna più fitta, più compatta, più ſolida, di forma più o meno globoſa, naſcente nel golfo a poca profondità, e trovanteſi attaccata agli ſcogli, alle pietre, ed anche alle vive conchiglie. Vedrete in quante, e quanto ſvariate maniere io ho cimentate coteſte due qualità di ſpugne, per veder pure ſe manifeſtano qualche indizio di vita, richiamando ſopra tutto ad eſame il più ſcrupuloſo quella ſoſtanza gelatinoſa, onde abbondano, e che ſi pretende eſſer la ſede del ſenſo, e del moto. E queſti cimenti ſono ſtati intrapreſi quando le ſpugne erano nel loro elemento, anzi parlando delle globoſe, mentre che tuttavia reſtavano aderenti agli ſcogli. Ma offenderei le parti dell' ingenuo Filoſofo, s' io diceſſi di avere in loro ſcoperto pur ſegnale, pur ombra di vita o di moto: e però, quanto almeno a queſte due ſpecie, non mi ſento punto diſpoſto a riporle, come vorrebbono i due lodati ſcrittori, nel novero de' piantanimali; e quindi io non le giudico che ſemplici vegetabili; e per ciò che riſguarda le globoſe, crederei anche di poter dire qualche coſa intorno al loro creſcere, e al loro maturare, di cui nulla finora ſi ſapeva in queſto genere di produzioni.

§. VIII.

Coralline.

Le ſpecie da me trovate ſono la corallina *officinale*, la *pavonia*, l' *opuntia*, e un' altra ch' io non la crederei che una varietà di quella che viene rappreſentata dall' *Ellis* nella Tavola XXIII, e da lui chiamata: *corallina articulata dichotoma, internodiis ſubcylindricis, cellulis rhomboideis, omnino tectis, & tubulis membranaceis exiguis, colligatis* (a). Uno degli ſcopi precipui di mie ricerche è ſtato quello di eſami-

(a) Eſſai des Corallines ecc.

nare con la maggior diligenza possibile, se queste coralline sono ricettacoli di polipi, siccome vuole questo chiarissimo Inglese, indotto a così pensare, non già perchè ve gli abbia effettivamente veduti, ma e dall' analogia, e dalle cellette minutissime che vi ha scoperte, che per lui avviso debbono essere destinate a quest' uso. Dirò io pure di avervi trovate queste cellette, o a dir meglio questi picciolissimi forellini, ma non mai dentro ad essi il più picciol vivente, ad onta anche de' più acuti microscopj adoperativi attorno, e di aver sempre osservate le coralline dentro all' acqua marina. Tai forellini sono ben diversi dalle ordinarie cellette, che ne' piantanimali alloggian de' polipi, e non sono in sostanza che pori, similissimi a quelli di assai piante marine, destinati a nodrire le coralline, sapendosi che la più parte de' vegetabili marini si nutrono per l' abito di tutto il corpo, non delle radici, di cui vanno senza. Io però penso col dottissimo *Pallas*, che le coralline si debbano separare dai piantanimali, ai quali erano state dall' *Ellis*, e dal *Linneo* male a proposito unite, e riferire semplicemente alle piante; e tanto più mi confermo in questa credenza, quanto che in qualche specie mi è riuscito di trovar le semenze.

So che il citato Botanico di Upsal, malgrado il non poter mostrare i polipi *flosculosi*, vuole tuttavia che le coralline appartengano al regno animale, per essere d' ordinario vestite di sostanza calcare; la qual sostanza come appunto calcare, è canone infallibile per lui, che non può essere che d' origine animale. Ma in primo luogo voi non ignorate quanto cotal canone, sicurissimo per *Linneo*, sia a tutta ragione controverso per altri. In secondo luogo volendolo anche passar per vero, quindi ne verrebbe che trovato avendo io nel mare altre produzioni vestite come le coralline, ed anche di vantaggio, di materia calcare, queste non meno dovrebbono riporsi fra gli animali; eppure non sono che verissime piante, riconosciute anche per tali dal *Linneo*, non che dagli altri Botanici. Io parlerovvi alquanto alla stesa di così fatti vegetabili pietrosi, perchè risguardano un punto interessantissimo, e che so che picca di molto l' illuminata vostra curiosità. Voglio dunque dire che la disamina di tai prodotti mi guiderà a cercare, se essi fornir ci potessero quell'

anello o quegli anelli, che legano insieme il regno fossile col regno vegetabile. Il chiarissimo *Donati* pensava che questo anello fosse il *musco petroso* dell' *Imperato*, e voi stesso lo avvertite nella vostra *Contemplazione*. Se la cosa fosse così, lo dovrebbero pur essere per la stessa ragione le varie piante petrose testè menzionate. Ma prima che con qualche fondamento si possa questo asserire, fa d' uopo a mio avviso l' assicurarsi d' una cosa, a cui non so se sia stato da altri finora pensato. O la sostanza lapidea in queste piante è puramente avventizia, nata cioè dalle particole terrose depositate sopra di esse dall' acqua marina; e in tal caso queste piante esser non possono il ricercato anello, altrimenti lo sarebbero egualmente tutti que' vegetabili terrestri, che in vicinanza di certe fontane si veggono talvolta intonacati di tartarosa materia, e che da' Geologi *incrostati* si appellano. O tale sostanza lapidea si è compenetrata con esse piante, ed è parte delle medesime, presso a poco come è la calce nella composizione delle conchiglie; e allora penderei a credere che queste piante considerar si potessero come punti di passaggio dal regno vegetabile al regno lapideo. Mi lusingherei che le mie analisi dilucidar potessero questo punto ancor tenebroso. In tal'occasione mostrerò quanto si allontana dal vero il chiarissimo *Ellis*, pensante che i muschi, i fuchi, ed altrettali produzioni marine non sono semplici vegetabili, ma verissimi piantanimali.

§. IX.

I Piantanimali sopra descritti non sono nidi di polipi, o come dicono Polipari.

Dopo le famose scoperte del *Peyssonel*, e le luminose conferme di Bernardo di *Jussieu*, si era universalmente pensato, che le penne marine, gli alcionj, le millepore, le madrepore, le gorgonie, i coralli, ecc., altro non fossero che polipari, o nidi di polipi, a quel modo che i favi, e i vespaj sono nidi di api, e di vespe. Ma per conto delle madrepore, delle millepore, e dei coralli, si sa che un tal sentimento è stato combattuto dal Sig. *Herissant*, il quale fatto a-

vendo scomporre nello spirito di nitro alcune di queste produzioni, ha trovato che risultano dall' unione d' innumerabili tubetti testacei, ciascun de' quali è composto, come le conchiglie, di una sostanza animale ossia membranosa, e di una sostanza terrosa, e che questi tubetti sono continuati co' polipi che dentro vi albergano, come è continuata la conchiglia col proprio animale (*a*). Cotesti polipi non sono adunque semplicemente rinchiusi nelle loro cellette, ma formano un tutto solo con esse, e conseguentemente con la madrepora, o millepora, od altro marino prodotto dove si trovano.

Non può negarsi, l' osservazione è nobilissima, e degna veramente di un tanto Accademico. Pure mi si conceda di accompagnarla da un picciol rilievo. Egli ha instituita quell' ingegnosa sua analisi a Parigi, o almeno in luogo distante dal mare, che è quanto dire allorchè le soprascritte produzioni marine erano già mancanti de' loro polipi, avendo io veduto che restando questi qualche giorno fuori dell' acqua, non solo periscono, ma per essere al sommo gelatinosi spappolano, e si riducono al nulla. Le medesime adunque sottoposte a quel dissolvente, quantunque si sieno scomposte in quella doppia sostanza, membranosa, e terrosa (mentre un tal fatto è verissimo) non potevano però fargli vedere che i tubetti, onde risultano, sono continuati co' loro polipi, giacchè questi polipi allora non v' erano. Esaminando però quel luogo della sua bella Dissertazione, dove il Sig. *Herissant* favella di questa continuazione, chiaro apparisce averla lui dedotta dall' analogia delle conchiglie, le quali sciolte che sono dallo spirito di nitro in quelle due sostanze, terrosa, e membranosa, fanno vedere che quest' ultima è un' appendice o una continuazione dell' animale medesimo. La pruova di questo esimio Anatomico non è dunque diretta, ma analogica, e per conseguente non affatto persuasiva. Questa persuasione, se pur vi era, bisognava dunque cercarla ne' mentovati piantanimali, quando sono forniti de' viventi loro polipi.

(*a*) Mem. sur l' Ossification. Mem. de l' Acad. 1766.

lipi. Io però ad accertarmi del fatto non poteva avere più bella occasione di quella della madrepora a bottoncini (§. V.), col metterne alcuni gruppi ricchissimi di vivi polipi nello spirito di nitro indebolito con l' acqua comune, come praticato aveva il Sig. *Herissant*. Tanto io feci, ed ebbi il piacer di vedere che questo celebre Fisico, usando l' argomento analogico, non si era ingannato. Ma da questa madrepora animata io trassi lumi anche maggiori. Le conseguenze furono adunque le seguenti. Primieramente i polipi non erano stati da quel mestruo niente pregiudicati. In secondo luogo ad alcuni polipi più grandi si vedevano attaccati de' polipi più piccioli, o piuttosto formavano un tutto con loro, come i rami che pullulano da un albero, o i piccioli polipi a braccio quando sono uniti al corpo materno. In terzo luogo tutti i polipi comunicavano insieme per via di numerose sottili fascie membranose, che prima dell' intiero scomponimento della madrepora si vedevano continuate con le cellette calcari, dentro cui dimoravano i polipi. Le notizie che mi fornì l' acido di nitro, me le fornì pure l' aceto, anzi per operar questo con più di lentezza, la parte animale della madrepora rimaneva anche più conservata. La conclusion generale tratta da questi fatti salta dunque agli occhi, cioè a dire che un gruppo di madrepora non è altro che un gruppo di polipi moltiplicanti per polloni, come quelli del *Trembley*, e incrostantisi a poco a poco d' una materia terrosa.

Da queste verità di fatto voi raccoglierete facilmente ciò che si può ragionevolmente pensare d' intorno a que' polipi della madrepora a bottoncini che talvolta si veggon nei vasi abbandonare le loro cellette, e recarsi altrove (§. V.). Essendo per loro l' acqua de' vasi non così amica, come quella del mare, gli è certo che faranno ogni sforzo per fuggirsene, e stante la loro natura gelatinosa quelli che sono attaccati a' compagni con minor numero di punti, facilmente si staccheranno da loro. Di più moltiplicando eglino, come si è veduto, per polloni, non è naturale il pensare, che diversi di questi polloni giunti a maturità si stacchino spontaneamente dal comun ceppo, come fanno appunto i polipi Trembleyani, e si trasferiscano in altre parti per fondare novelle colonie? Nella qual supposizione non potremo noi cre-

dere che i polipi ſuggenti dalle madrepore eſſer poſſano di queſto numero.

I tentativi da me felicemente intrapreſi ſu le madrepore, non ho potuto intraprenderli ſu le millepore. I picciolisſimi, e appena diſcernibili loro polipi non me lo hanno conceduto.

Lo ſpirito di nitro che ſtato mi era sì vantaggioſo per le madrepore, mi ſi rendeva inutile per gli alcionj, e per le penne marine. Per analizzare queſti piantanimali biſognava aſſolutamente ricorrere al coltello anatomico, lavoro che mi riuſcì tanto più geniale, quanto che non era ſtato da altri tentato. Che immaginereſte voi, illuſtre mio amico, che foſſe un alcionio, quello almeno che, per ſomigliar rozzamente a una mano, detto viene da alcuni *mano marina*? Un prodigioſo aggregato di animaletti, lavorati a guiſa di altrettanti membranoſi tubetti ſchiacciati, che tutti s' aprono all' eſterno dell' alcionio con quelle picciole bocche ſtellate che chiamiam polipi. La compoſizione delle penne marine non diſcorda molto nell' eſſenziale da quella degli alcionj.

Quanto poi alle gorgonie, giacchè anche di queſto piantanimale qui debbo parlarvi, l'azione degli acidi, e più la notomia mi ha moſtrato che i polipi ſono una continuazione della corteccia delle ſteſſe gorgonie, che queſta corteccia per via di molti attacchi ſi uniſce e ſi collega col corpo corneo che chiamato abbiam *legno*, e che queſto legno mediante ſimili attacchi fa lo ſteſſo con la midolla. Sicchè in rigore ſi può dire, che i polipi, la corteccia, il legno, e la midolla vengono a formare un tutto ſolo. Dal fin qui detto rimane dunque evidentemente provato, che le madrepore, le gorgonie, le penne marine, gli alcionj (parlando almeno del ricordato di ſopra) non ſono per verun conto nidi di animali, o polipari che vogliam nominarli, ma ſono eglino ſteſſi famiglie numeroſiſſime di animali ſotto l' apparenza di piante, e perciò chiamati piantanimali, del qual vocabolo io ho fatto uſo, più per adattarmi alla vulgare eſpreſſione dei Naturaliſti, che per ſervire alla verità.

§. X.

Diversi animali nuovi.

Crederò di poterli chiamar tali per non aver trovato alcuno che ne favelli. Il primo ha figura rozzamente cilindrica, è suscettibile di accorciamento e di allungamento; e quando si accorcia ha di lunghezza tre pollici circa, e di larghezza più d' uno; e quando si allunga, scema in larghezza, e cresce in lunghezza quasi del doppio. Questi diversi movimenti gli eseguisce l' animale senza il ministero di anella, che anzi il suo corpo è tutto liscio, e si vede sempre spalmato d' un lubrico e leggermente vischioso suco. La parte anteriore che chiamerò *capo* è ornata di due ordini circolari di punterelle allungate, l' uno concentrico all' altro, le quali punterelle direbbero *tentacoli* i Nomenclatori, ed io chiamerò *corna*, per avere qualche tratto di analogia con quelle delle lumache. Sono di fatti pieghevolissime come loro, e l' animale fino a un dato segno, quando vuole, le accorcia. Quelle che constituiscono il circolo esteriore sono più lunghe dell' altre del circolo interno, giungendo le prime ad un pollice e mezzo, e le seconde ad un pollice dimezzato. Del rimanente l' une e l' altre sono somigliantissime, e tutte insiem comprese arrivano a più di dugento. Internamente son piene d' un liquor trasparente, che al gusto si manifesta essere acqua marina, e sono anche forate all' apice, mentre comprimendole ne schizza da esso apice un zampilletto di tal liquore. Non ho lasciato di fare qualche rozza notomia di questo animale.

Sta egli sempre alla profondità di pochi piedi d' acqua; e sembra preferire que' luoghi, in cui suol regnare perfetta calma. Ma queste circostanze non bastavano probabilmente per la conservazion sua. Così nudo come io l' ho descritto, e d' altronde inetto al muoversi localmente, malgrado quegli allungamenti, e accorciamenti del proprio corpo, sarebbe forse stato esposto a troppi pericoli; e però la natura ha voluto metterlo in sicuro, mediante una specie di borsa, nella quale si trova sempre rinchiuso. Cotesta borsa è lunga un

piede, perpendicolare all' orizzonte, chiusa nel fondo, e quivi sempre raccomandata a radici di piante marine, segnatamente di alga, per cui rimane diritta; nella parte poi superiore è aperta, ed è da questa apertura che l' animale mette fuori il capo, e que' due ordini di corna. Se il mare è tranquillo, o poco agitato, sporge immobilmente fuor della borsa, e per la varietà del colore nelle corna, e la regolare posizion loro, si crederebbe più presto un fiore, che un animale. Ma questo fiore si ritira di presente, e sparisce, quando l' acqua venga agitata, o la mano se gli accosti per coglierlo. In quel momento adunque l'animale si nasconde tutto dentro la borsa, senza lasciar però di ricomparire, cessata l' agitazione o rimosso il pericolo. E se la borsa entrovi l' animale si stacchi dal fondo del mare, e si collochi in un vaso pieno d' acqua con l' apertura all' insù, l' animale fa quel giuoco stesso di uscire, e di nascondersi, come faceva nel luogo nativo. Estrattine alcuni dalle loro borse, si vede che a proporzione che l' animale è più grande la borsa è maggiore. Queste borse sono di materia mollissima, e affatto membranosa. Non manifestano senso di sorta, non ostante che abbiano tutte le apparenze di sostanza animale. Ho esaminata la struttura di alcune, e non lascierò di descriverla. Qui avverto solo che l' animale è libero affatto dentro alla borsa, così che non ha veruna connessione, verun legame con essa, cosa ch' io non avrei mai creduta.

Non ignorate esservi un genere di animali chiamato *tubularie* dai Naturalisti, per annidare nell' acque dolci o salate dentro a dei tubi, da' quali esce con la parte anteriore del corpo, corredata di filamenti o cornetti. Il nostro animale apparterrebbe mai a un tal genere? In questa supposizione verrebbe a formare una specie novella, anche per la parte del tubo a borsa, che non è di sostanza cornea, come sono quelli dell' altre tubularie.

Que' tratti marittimi, che danno ricetto al sopra descritto animale, ne albergano un altro alquanto analogo ad esso, in quanto che anche questo sta dentro ad un tubo, ed ha il capo attorniato da una moltitudine di filamenti, quantunque però si conosca subito essere di specie affatto diversa. Questo con sicurezza si può chiamare una tubularia, simile alcun po-

co alla rappresentata dall' *Ellis* nella Tavola XXXIV, da lui chiamata, *corallina tubularia melitensis* (*a*), ma che però ha caratteri essenzialmente diversi, e perciò a tutta ragione si può dir nuova. Sentirete un saggio della sua storia, tanto per ciò che risguarda i costumi dell' animale, quanto per ciò che concerne il suo organismo, e quello del tubo albergatore. Adesso non farò che darvene un cenno. Cotal tubo che è di forma cilindrica, e di sostanza cornea, oltrepassa il piede in lunghezza, ma il suo diametro è di poche linee. Esso pure s' innalza dirittamente col foro all' insù, la parte inferiore poi alla distanza d' un pollice e mezzo dalla sua estremità s' incurva, e fa gomito, e questo gomito trovasi sempre attaccato o piuttosto *ferruminato* ad una pietra, che serve al tubo di fermo sostegno per non cadere. Essendo l' acqua in moto o nel mare o dentro d' un vaso, il foro del tubo apparisce vuoto, ma cessata l' agitazione si vede riempiersi da un corpo, che a poco a poco si solleva sopra di esso; e che dall' allargarsi superiormente che fa, richiama alla mente l' idea d' un pennello, il cui manico in certa guisa rappresentato viene dal tubo istesso. Il pennello si fa sempre più largo per disopra, a tal che arriva ad acquistare il diametro di quattro pollici. Così a noi si rappresenta quel corpo animato uscito dal tubo, e riguardato di faccia; se poi si miri in profilo, il pennello rimane come diviso in cinque minori, punta a punta vagamente insieme connessi. Ma si cagiona egli qualche nuova scossa nell' acqua? Sul momento si perde di vista questo gradito spettacolo, precipitatosi, e seppellitosi nel tubo il pennello, di dove prima era uscito. E' l' animale, come voi ben vedete, che dal venir fuora crea agli occhi nostri quell' inaspettata piacevolissima scena, che le prime volte che mi si offerse non potea saziarmi di rimirarla. Il pennello non vien composto di corna, come nell' altro animale, ma di fila simili in certo modo alle penne, in quanto che ogni filo va guernito di un doppio ordine di barboline.

Anche questo animale non è punto attaccato al tubo. Ne

(*a*) L. c.

ho argomenti i più ſicuri, i più deciſivi. Se ne venga tolto, e così nudo ſi riponga nell' acqua, non laſcia di riſare il pennello, ſenza però muoverſi di luogo. Solamente ſi allunga, e ſi accorcia, preſſo a poco come l'altro animale. E' di fibra molto irritabile, ed ha qualche ſomiglianza, anche per la grandezza, con le mignatte. Ve ne ſono però de' più grandi, e de' più piccioli, e la mole del tubo è ſempre proporzionata a quella dell' animale che dentro vi abita.

Le ricerche ch' io faceva attorno a que' granchietti, denominati volgarmente *bernardi eremiti*, de' quali più ſotto dovrò parlare, mi fecero ſcoprire un terzo animale, che come i due antecedenti a me parve nuovo. Cinque individui adunque della medeſima ſchiatta erano tenacemente aderenti al guſcio d' un murice, la cui nicchia interna era occupata da uno di queſti piccioli granchi. Quando il guſcio mi fu recato da' peſcatori, era più di mezz' ora che ſi trovava fuor d' acqua, e allora ciaſcheduno di queſti individui rappreſentava un cono troncato, la cui baſe del diametro all' incirca d' un pollice era come incollata al ſuddetto guſcio. Ripoſto queſto guſcio nell' acqua non indugiarono i cinque coni troncati a preſentarmiſi ſotto un aſpetto novello. La parte adunque troncata del cono ſi allargò di vantaggio, e venne a formare un piano circolare, da cui ſpuntò un eſercito di molli cornetti pieghevoli di varia grandezza, come dal capo d' una lumaca ſpuntan le corna. Su quel piano apparivano altresì due fori, uno centrale, e l' altro laterale. Oltracciò queſto piano vedevaſi a fior di pelle tutto gremito di ſifoncini, i più de' quali s' imboccavano con le picciole corna. Queſte poi erano turgide d' acqua marina, come ſi vedeva dal premerle, giacchè allora una porzione entrava ne' ſifoncini, e un' altra ſotto forma di zampilletto uſciva per l' eſtremo delle corna, per eſſer quivi ſottilmente forate; e guſtandolo non ſi poteva negare che quel liquido foſſe acqua di mare. Comprendevaſi adunque come mediante un tal meccaniſmo ricevono queſti curioſi animali l' acqua marina dentro di loro. Tutti queſti fenomeni cadevano ſott' occhio o quetaſſe il murice, o per opera del rinchiuſo eremita veniſſe recato da luogo a luogo. Ma toccando col dito gli animali, o movendo fortemente l' acqua, di preſente ſi naſcondevan le

corna, ſi perdeva quel piano circolare, ed ogni individuo ripigliava la figura d' un cono troncato. Queſti viventi ſembrano eſſer fatti dalla natura per rimanere ſempre attaccati al medeſimo ſito. Nel tempo almeno ch' io gli ho tenuti nell' acqua de' vaſi, non hanno mai laſciato quel morto teſtaceo.

Ma non erano eglino ſoli che ne occupavano la ſuperficie. I ſiti vuoti rimanevano riempiuti da un eſercito infinito di animaletti, tanto che baſta diſcernibili dall'occhio nudo, ma aſſai più chiari, contemplandoli alla lente, così fitti, così addenſati ſu quel teſtaceo, che di più eſſer nol ponno i peli che ſorgono dalla pelle d' un cane o d' un gatto. La lunghezza de' più grandicelli era di tre linee, quella de' più piccioli di una linea dimezzata. La loro traſparenza permetteva di eſpiarne le interne viſcere. Ho adunque potuto eſaminarli, e deſcriverli come conveniva. L' eſtremità inferiore d' ogni animaletto era radicata ſul nicchio, la ſuperiore, in cui ſcorgevaſi la bocca, era rivolta all'insù. Se il nicchio veniva eſtratto dall' acqua, o laſciandovelo dentro ſe queſta fortemente ſi agitava, gli animaletti contraendoſi ſubito in ſe ſteſſi s' impicciolivano; diverſi cornetti poi, che a guiſa di corona attorniavano le parti ſituate al di ſotto della bocca, s' internavano, e naſcondevanſi dentro del corpo. Non ho potuto ſapere come moltiplicano queſti minuti viventi, per non averli veduti che quella volta ſola. Mi ſono però accorto che tagliandoli a brani, riproducono le parti mancanti, e che tal riproduzione ſi ha prontiſſimamente. Mi hanno offerto un altro fenomeno che non debbo tacervi. Al corpo di parecchi ſi vedevano attaccate delle veſcichette. Queſte alla lente oſſervate ſi ſono traſmutate in tanti uteri con dentro i feti ſemoventi. Queſti feti non indugiavano a romper l' utero, e ad uſcirne, dandoſi a nuotare liberamente nell' acqua. La ſingolariſſima maniera, onde nuotano queſti animalini, e l' interiore loro conformazione, crederò due coſe degne d' eſſere riferite. Ma queſti uteri come ſi trovano aderenti al corpo di quegli altri numeroſiſſimi viventi? In origine appartengono forſe eſſenzialmente ad eſſi, ovveramente ſono produzioni paraſſitiche?

§. XI.

Moto progreffivo ne' Ricci marini.

Parrà forfe ftrano a taluno ch' io mi occupi di quefto argomento , per effere ftato trattato da due prodi Naturalifti, *Reaumur*, e *Jano Planco* , per tacere di alcuni altri non incelebri Autori, quafi che io qui null' altro far poffa che ridire unicamente il già detto . Ma per quefto appunto che i foprammentovati Fifici ne hanno parlato , imprendo a parlarne io pure; giacchè non convenendo effi fu di un tal punto , anzi effendo l' uno diametralmente oppofto all' altro , credo opportuno l' entrare io a terzo nella queftione , fu la lufinga che per le mie offervazioni poffa rimaner decifa per fempre. Si fa che i ricci marini fono croftacei di forma globofa , armati di fpine ; e fi fa egualmente dai conofcitori , che quando fono nell' acqua caccian fuora , e ritirano a lor piacimento una portentofa copia di corna lunghe e carnofe . Secondo il *Reaumur* fono le fpine che ne' ricci marini fanno le veci di gambe. Le corna poi, ben lungi dal concorrere ai loro movimenti, fervono a fiffarli a que' fiti dove vogliono, e quafi ad ancorarli. Vuole per l' oppofito *Jano Planco*, che delle fpine non fi fervano punto quefti animali per andare , ma che l' efficiente ed unica caufa de' progreffivi loro movimenti fieno le corna . E tutti e due recano in mezzo dei fatti da loro ful Mediterraneo veduti (*a*) . Se mi è lecito però l' inframmettere qui il mio fentimento, dirò che quefti fatti fono troppo pochi per decidere o per l' una parte o per l' altra . I nominati chiariffimi Naturalifti hanno detto in que' brevi loro racconti qualche cofa di vero, ma non hanno detto tutto quel vero che abbifognava per chiarire pienamente la cofa. A confeguir ciò vi voleva più ozio ful mare, maggior copia di ricci da fperimentare, e tentativi più ripetuti,

(*a*) Mem. de l' Acad. 1712 Atti dell' Accad. di Bolog. T. V. Par. I. Ambedue quefti Autori hanno inftituite le loro offervazioni fu la fpecie medefima di ricci marini , che è ftata pure efaminata da me.

tuti, e più variati. E tenendo dietro a quanto su tal materia hanno eglino pubblicato, apparisce che tali circostanze sono loro mancate. Divisai adunque di fare io ciò che non hanno potuto far essi, e presso i Fisici mi riputerei degno delle maggiori riprensioni, se a sommo studio cercato non avessi di levare ogni controversia, per essermi trovato in un luogo che non poteva di più abbondare di somiglianti crostacei. Io qui però null' altro farò che accennarvi alcuni de' precipui miei risultati, riserbandomi poi nel mio libro a farvene sentire le pruove.

I ricci marini sono stati da me sperimentati ora fuori dell' acqua, giacchè avea veduto che ci possono vivere per qualche tempo, ora dentro di essa. Parlerò prima di quanto ho osservato fuor d' acqua. Se adunque si collocano freschi sopra d' un piano orizzontale asciutto con la bocca all' ingiù, cioè a dire in quella situazione che è loro naturale quando vanno nel mare; allora o non si muovono punto di luogo, raggirandosi soltanto lentamente una o due volte attorno a se stessi, e ciò anche di rado; o se si muovono progressivamente, fanno pochissimo viaggio, come d' uno o di due pollici, poi del tutto si arrestan per sempre. Se poi sono capovolti, così che la bocca sia rivolta all' insù, e il podice, che giace nella parte opposta, sia volto all' ingiù, allora i ricci d' ordinario nè punto nè poco si muovono. Ma udite un fenomeno veramente strano. Se con sezione perpendicolare al diametro che termina alla bocca, e al podice si tagli il riccio in due emisferi, e se l' emisfero fornito di bocca si metta sul medesimo piano in quella postura che ha il riccio quando va nell' acqua, allora questo emisfero non indugia a muoversi, e a trasferirsi alla distanza di molti e molti piedi dal sito dove prima si era posto. Nè credeste voi già che questo fosse un casuale avvenimento. Avrò fatta la pruova sopra sessanta di questi emisferi, nè vi è stato pur uno che fatto non abbia qualche considerabile viaggio. Vi dirò di più. Que' ricci che essendo intieri, erano immoti, se nel modo già detto si dividevano in due emisferi, quello che aveva la bocca, cominciava di subito a muoversi localmente. Universalmente poi gli emisferi corredati dell' ano non davano quasi mai il più picciol passo. Ma quale può mai esser la cagione di così fatte

apparenti bizzarrie? Non ho lasciato di rintracciarla, nè lascierò a suo tempo di dirvene quel ch' io ne penso. Frattanto mi conviene farvi sapere, che que' picciolissimi viaggi ne' ricci intieri, e que' grandemente più lunghi ne' ricci dimezzati si eseguiscono tutti col ministero delle spine, senza che mai vi concorrano punto le corna; che anzi queste corna, essendo i ricci fuor d' acqua, non appariscono punto, per essere allora ritirate dentro al crostaceo. Ho studiato con quale meccanica operano le spine tali movimenti.

Resta ora a narrare i risultati dei ricci riposti nell' acqua. Per veder nettamente quanto accade in loro, è ottima cosa lo sperimentarli sul fondo piatto di un bacino di majolica bianca. Subito adunque che tal fondo resta coperto da un sottile strato di acqua, il riccio mette fuori le corna, le muove, e le agita in varj sensi, ma senza che gli diano il minimo ajuto per muoversi localmente. Nel tempo che agita le corna, agita anche le spine, e mediante queste ultime fa alquanto girare attorno a sè il corpo, ma quasi mai non lo reca da luogo a luogo, o se ve lo reca, picciolissimo è lo spazio trascorso. Se lo strato d' acqua è più grosso, allora le spine non si muovono più, ma sibbene le corna, e dall' azione di queste corna nasce il trasporto dell' animale. Che se aggiungasi nuov' acqua, talchè lo strato sia alto mezzo pollice, l' azione delle corna si rende maggiore, anche per le corna che prima non agivano, e che adesso agiscono; e in conseguenza il riccio cammina sul bacino con accresciuta celerità, e sempre independentemente dalle spine. E' una maraviglia il vedere più centinaja di corna impiegate co' moltiplici, e diversificati lor movimenti a trasportare da luogo a luogo quella macchinetta animata. Ho con attenzione osservati questi movimenti, e ne riferirò le varie circostanze.

Il muoversi de' ricci per via delle corna è diversissimo dall' altro per via delle spine. Il moto cagionato dalle spine, qual ch' egli sia, fassi a picciole riprese; quello che prodotto viene dalle corna è continovato. Di più quello dura pochissimo tempo, questo seguita per molto. Se il catino abbia pareti alte e verticali, e riempiuto sia d' acqua, il riccio con facilità somma s' inerpica su per le pareti, e giunge fino al pelo dell' acqua, anzi più volte sporge da esso con parte del

corpo, e quivi arrestasi, e posa. Altre volte poi dopo l'avere alquanto posato, discende fino al fondo del vaso, oppure fa varj giri or alti or bassi attraverso alle sue pareti. E questi diversi, e talor contrarj movimenti si eseguiscono egualmente bene dal riccio spogliato delle sue spine rasente il corpo. Le corna oltre al trasportarlo da luogo a luogo, lo fissano anche dove a lui piace, e ciò mediante un glutine gemente dalle loro estremità, in grazia del quale rimane attaccato e sospeso alle pareti verticali de' vasi, malgrado il contrariante suo peso. Se un riccio dividasi in due emisferi, come si è detto di sopra, e tutti e due si mettano nel fondo dell' acqua con la convessità all' ingiù, l' emisfero che ha la bocca si muove quasi come se fosse un riccio intiero, facendo sempre uso delle corna, e non mai delle spine; l' altro emisfero che ha l' ano non lascia di metter fuori le corna, ma quasi sempre resta immobile. Che se un intero riccio venga capovolto, facendo l' ano andar di sotto, e la bocca di sopra, allora non va niente o quasi niente, ma cerca soltanto di rivoltarsi, e di ripigliare la primiera naturale positura, presso a poco come suol fare una testuggine rovesciata, e purchè il riccio si trovi in un fondo sufficiente d' acqua, vi riesce mirabilmente col ministero delle sole corna. Lo stesso accade se in vece di metterlo supino si collochi di fianco. La meccanica che opera questi raddrizzamenti del corpo è qualcosa di singolare, e vuole esser descritta.

Ma contentato io non mi sono di esaminare i nostri ricci dentro a' vasi, ho voluto anche esaminarli nel mare, scegliendo a bella posta que' luoghi, il cui fondo per la scarsezza grande dell' acqua si vedeva chiarissimamente. Sebbene quanto ai loro moti, le cause erano pure le stesse; e vo' dire che o movessero sul fondo del mare, o su qualche scoglio, il principio efficiente di tai movimenti erano d' ordinario le corna, e di rado vi concorrevan le spine.

Da questi miei risultati, che per appoggiarsi ad una immensità di esperienze sono sicurissimi, si fa chiaro ciò che debba dirsi intorno ai sentimenti fra loro contrarj di *Jano Planco*, e del *Reaumur*. Aveva ragione il primo, quando ammetteva che le corna ne' ricci marini facesser l' ufficio de' piedi; ma aveva il torto, volendo affatto escludere da tale uf-

ficio le ſpine. Il ſecondo poi s' ingannava a partito, ſtabilendo che le ſpine foſſero le ſole motrici dei ricci, e che le corna non faceſſero che tenerli fermi. Si eſamineranno le poche oſſervazioni recate in mezzo da queſti due chiariſſimi Naturaliſti per ſoſtenere ciaſcheduno la propria opinione, e ſi moſtrerà come la ſcarſità di queſte abbia potuto indurli in errore.

Ma le maniere praticate da' ricci marini per recarſi da luogo a luogo dentro del mare non ſono ſtate l' unico oggetto di mie ricerche. La loro ſoprabbondanza in que' luoghi dov' io mi trovava, l' agio grande di poterli oſſervare, e diciam anche il pochiſſimo che intorno ad eſſi è ſtato ſcritto, erano motivi per me troppo forti, onde cercare di apprendere nuove notizie da loro. I ſiti adunque marittimi dove amano ſoggiornare queſti croſtacei, gli alimenti che prendono, come ſi mettono al ſicuro nelle burraſche, ſe vero ſia, come è volgare opinione, che le preſagiſcono, ſe ſono ermafroditi, oppur ſe hanno differenza di ſeſſo, quale ſia il loro organiſmo, tanto nelle parti eſterne, come ſono le corna, e le ſpine, quanto nel guſcio calcare, e nelle parti interne, ſono ſtati punti da me diſcuſſi, e chiariti. E per ciò che appartiene alla loro organizzazione, la completa decompoſizione della parte calcare, mediante un meſtruo adattato, illeſa la parte animale, mi ha dato luogo ad alcune nuove e intereſſanti oſſervazioni.

§. XII.

Moto progreſſivo in altri Animali marini.

Dovendo eſſer breve nel ragionare di un tal moto, riſtringo tutti queſti animali nel preſente paragrafo, cominciando da quello che il *Redi*, il *Valliſneri*, *Jano Planco*, ed altri chiamano *mentula marina*, giacchè quantunque queſti Autori ſi accordino nel dire che è un animale che ſtriſcia ſu i fanghi, e ſu le arene del mare, neſſuno però ci fa ſapere di quali mezzi ſi ſerva per eſeguir queſti moti. Coſtui è di forma cilindrica, la ſua larghezza arriva ad un pollice e

mezzo, e la ſua lunghezza a diciotto, parlando almeno de' più grandi. Il colore ſuole eſſere cenerino, più aperto però nel ventre, e più foſco nei fianchi, e ſul dorſo. Ha due fori patenti, l' uno all' eſtremità poſteriore del corpo, che è l' ano, l' altro all' eſtremità anteriore, che è la bocca. Queſta bocca ſta ſituata nel centro d' un riſalto circolare, dal quale ſcappano, e diramanſi in giro venti cilindretti muſculoſi, corredati in cima di quattro come foglie dentate, così che ogni cilindretto emula bellamente un fiore. Queſta mentula va provveduta d' una ſtrabocchevole quantità di papille, con queſta differenza però che quelle del ventre eſcono immediatamente dal corpo, e quelle del dorſo eſcono dall' apice di piccioli tumori fatti a imbuto. Di queſti cilindretti, e di queſte papille, che non mette fuora l' animale ſe non quando è nell' acqua, ſi ſerve egli per attaccarſi dove a lui piace, mediante un viſco che fa uſcire da loro; e un ſimil uſo era già ſtato conoſciuto dal chiariſſimo *Bohadsch* nella ſua *Idra*, qualità di animale diverſa sì nella ſpecie, ma non nel genere da quella, di cui ora favello. Ma per conto delle papille, avrebbe egli eziandio conoſciuto un altro uſo, ſe inſtituito aveſſe i neceſſarj eſami, cioè a dire di ſervirſi la ſua idra di tali papille per muoverſi progreſſivamente. Le mentule almeno da me oſſervate ſi prevalgono ſempre delle loro papille, ed in iſpezieltà di quelle del ventre per paſſare da luogo a luogo ſu i fondi del mare: quantunque poi un tal moto venga ancor ſecondato dal vario ingroſſarſi, e impicciolirſi, e allungarſi, e abbreviarſi del corpo delle mentule ſteſſe. Di quanto io qui aſſeriſco produrrò fatti i più ſicuri, i più incontraſtabili. Que' due ufficj adunque che ne' ricci marini fanno le corna, lo fanno nelle mentule marine le loro papille.

Il *Redi* dove favella delle mentule marine (*a*), oltre le notate di ſopra, che vagano liberamente nel mare, fa menzione di un' altra ſpecie, da lui denominata anche *pinco marino*, che ſta ſempre radicata a qualche corpo ſubacqueo, ſen-

(*a*) Degli Anim. viv. negli Anim. viv.

za mai distaccarsene, la quale specie si fa ora cadere sotto altro genere di animali, appellato *Tethyum* dal *Bohadsch*, e *Ascidia* dal *Linneo*. Questa così chiamata mentula dal celebre nostro Italiano quantunque estranea al presente paragrafo, per non godere della facoltà *loco-motiva*, tuttavia io qui ve la accenno, non solamente per dirvi che dalle osservazioni fattevi attorno io crederei di averne trovata una specie novella, ma per notificarvi eziandio che questa specie mi è paruta appartenere ad uno di quegli esseri organici, ne' quali va a finire il senso, e la vita.

La comodità accordata al *Reaumur* dalle coste del Poitou, e dell' Aunis di potere esaminare il moto progressivo delle ortiche di mare, è stata a me conceduta dal Mare ligustico. E' notissimo presso i Naturali scrittori, che per ortica di mare s' intende un genere di animali molluschi, di figura tondeggiante, corredato di corna pieghevoli, e attaccantesi a' corpi subacquei (in varie specie almeno) dal *Linneo* denominato *Medusa*. Se non ho trovato le specie osservate dal citato Naturalista Francese, mi sono però abbattuto a due altre, una delle quali io giudico nuova. Concepite un cilindro molle e carnoso, lungo 18 linee, e largo 12, attaccato col piano inferiore a una pietra, e forato nel centro del piano superiore, sotto il qual piano spunti in giro dalla superficie convessa una serie di 90, e talora di 95 filamenti, ed avrete qualche rozza idea della forma del corpo, della bocca, e delle corna della specie di ortica ch' io non trovo descritta. Resta sempre attaccata alle pietre, e agli scogli subacquei, e allora volendola giudicare dall' occhio si crederebbe immobile. E' però capace di movimento progressivo quando vuole, e per conoscer bene la cagione producitrice di un tal movimento, basta attaccarla col piano opposto a quello dove ha la bocca (il qual piano chiamerò base) ai lati d' un vaso di vetro pieno d' acqua. Siccome ordinariamente non ama questa ortica di starsi nel luogo, in cui è stata posta, così per la trasparenza del vetro si vede come fa a mutar sito. Supponiamo che l' ortica voglia venir giù per le pareti del vaso. La porzione di base che è più alta scorre uno spazietto all' ingiù, staccandosi dal sito dov' era, e recandosi un poco più basso, senza però che l' animale can-

gì ancora di luogo. Intanto la parte ſtaccata forma un labbro o cordone, che a guiſa di placida onda s' inoltra nella baſe, andando ſempre dall' alto al baſſo, e in tal maniera ſi tira anche dietro l' animale: quando poi il cordone è giunto alla parte ima della baſe, ſiccome allora va innanzi per un picciol tratto, così per un picciol tratto diſcende pur l' animale, e queſto ſi può dire il primo paſſo ch' ei fa. Per farne un ſecondo non ha che a ripetere la meccanica di prima, e così dicaſi del terzo, del quarto paſſo, ecc. Comechè queſte ortiche per andare ricorrano il più a un tal mezzo, non è però che in certe circoſtanze non ne pratichino qualche altro, come ſi è quello di aver ricorſo alle corna, quaſi convertendole in piedi, oppur l' altro che è più ſingolare, cioè a dire di ſtaccar la baſe dal ſito dove impiantavaſi, e allungando il corpo di ſpignerla più in là, ed attaccarla di nuovo, accorciando in ſeguito il corpo coll' accoſtarlo alla baſe, venendo a fare in tal guiſa un paſſo a ritroſo; e ripetuta la medeſima operazione giugnendo a farne un ſecondo, poi un terzo ecc., e per tal modo recandoſi da luogo a luogo con movimento retrogrado.

L' altra ſpecie di ortica marina da me oſſervata ſembrami eſſere quella ſteſſa che accenna *Jano Planco*, e che paragona a un garofano (*a*). Certamente queſto animale quando è pienamente ſpiegato, ed ha fuori le corna ſomiglia ad un fiore, ma in quel caſo, eſſendo tutto rubicondo, lo comparerei piuttoſto a quello d' un melagrano. Che che ſiane però, neppur queſta ortica è mai vagante nel mare, ma è ſempre attaccata a qualche corpo ſtabile. Per gl' innumerabili cangiamenti di figure che prende ſi può chiamare un vero Proteo. Mi è piaciuto di oſſervare con qualche minutezza queſti cangiamenti, e notati ne ho i principali. Tratti diverſi individui di queſta ortica dal mare, e attaccati alle interne pareti di un vaſo di vetro pieno d' acqua, ſiccome fatto aveva nell' altra, accorto mi ſono ch' ella ama di rimanerſi a lungo fiſſa ſul medeſimo ſito. Non è per queſto però che non ſi muova progreſſivamente quando a lei piace; ma per diſcernere cotal mo-

(*a*) De Conch. min. not.

to, e come si eseguisce, gli è d' uopo ricorrere alla lente. Volendo a cagion d' esempio discendere dal vaso l' ortica, spinge avanti con infinita lentezza quella porzione di base del suo corpo, non già che è in alto siccome si è veduto nell' altra ortica, ma che è al basso, alla qual porzione tien dietro con pari lentezza il rimanente della base, e conseguentemente del corpo, e così l' ortica trasportasi al basso per uno spazietto arcipiccolissimo. Iterando l' operazione, viene ella a scorrere un secondo spazietto eguale al primo, e nella medesima maniera ne descrive altri e poi altri. Ma essendo questi spazietti, siccome io diceva, brevissimi, quindi è che trascorso l' intervallo d' un' ora, appena è giunta l' ortica ad aver fatto un mezzo pollice di cammino. L' altra ortica è men pigra a muoversi progressivamente. E questo è l' unico mezzo, per quanto è a me noto, onde si strascica da sito a sito la presente ortica.

Queste due qualità di viventi non essendo state da' curiosi studiate, ho proccurato di studiarle io, esercitandomi sopra tutto in quella parte che riguarda l' economia animale, siccome la più interessante. Ve ne ragguaglierò altra volta, non potendo qui però trattenermi dal favellarvi brevemente d' una cosa, che non solo riguarda le ortiche di mare, ma presso che tutti gli animali fin qui menzionati. Parlo di que' braccini, e picciole corna che ho detto spuntare da' loro corpi: essendo a voi noto che ingegni analoghi sono destinati in più altri animali acquajuoli a creare col loro moto di vibrazione un tenue vortice nel fluido, impellente alla bocca dell' animale i corpicciuoli che dentro vi nuotano, è più che probabile che nata in voi sia la curiosità di sapere, se cotesti braccini, cotesti cornetti sono fatti pel medesimo uso, e il mio silenzio saravvi forse rincresciuto. Ma io non potea nulla dirvi di un tal vortice, perchè non ha luogo nei nostri animali. Che anzi se si eccettuano i ricci marini, le mentule, e la prima specie di ortica, le corna, e le papille de' quali si agitano in varj sensi, senza però creare nell' acqua verun moto sensibile, queste parti nel rimanente de' nostri animali, spiegate che sieno, si rimangono continuatamente in pienissima quiete. E' dunque per sè chiaro che il loro ufficio in queste generazioni di viventi è diverso. Quanto alle papille delle

delle mentule, e alle corna de' ricci marini, ſi è già veduto che la loro deſtinazione è quella di far muovere l'animale, e di ancorarlo. Le corna poi delle ortiche, e quelle degli animali del paragrafo X. io ſono perſuaſo che ſieno tubi fatti dalla Natura per ricevere l' acqua marina, e traſmetterla al corpo dell' animale, ſiccome ha penſato delle ſue ortiche il *Reaumur*, e crederei di poterlo evidentemente moſtrare. Per conto poi de' filamenti penniformi della mia tubularia, e de' braccini de' polipi dei piantanimali già deſcritti, io vi manifeſterò ſul loro uſo le mie congetture.

Oltre alle ortiche che ſembrano fiſſe, parla il *Reaumur* di alcune altre, che chiamano *erranti*, per trasferirſi, nuotando, da luogo a luogo nel mare. Queſte imitano la forma di un fungo a ombrello capovolto, del diametro talvolta di due piedi: hanno la conſiſtenza, o a dir meglio la tenerezza di una gelatina, e per poco che ſi tengano fra mani ſi ſciolgono in acqua. L' ombrello che è conveſſo al di fuora, e concavo dentro, è dotato d'un moto alterno di reſtrizione, e di dilatazione, emulante quello di ſiſtole, e di diaſtole, e mediante queſta ſiſtole, e queſta diaſtole nuota l' animale, ed erra nel mare.

Queſta nobile oſſervazione, che è tutta del ſopraccitato illuſtre Accademico, l' ho verificata con piacere in diverſe ortiche erranti. Sonomi ſopra tutto trattenuto a contemplare quella ſpecie di ſiſtole, e di diaſtole, e tra alcune particolarità che riferirò, ho ammirato che un tal moto reciproco dura nell' ortica da tre quarti d' ora cavata dall' acqua marina. Ho veduto di più che il ſuddetto moto pare che ſia l' unico argomento che queſto ſtrano eſſere ha vita, giacchè irritandolo, ferendolo, tagliandolo a pezzi, non dà egli il più picciolo indizio di ſenſo o di moto. Per altro le mie ortiche erranti quantunque laſciate in aſciutto ſi ſciolgano a poco a poco preſſochè tutte in acqua, ſono ciò non oſtante ben lontane dall' eſſer tenere a guiſa di gelatina, come ſi erano quelle che oſſervato aveva il *Reaumur*. Hanno anzi una ſodezza, che è di mezzo tra la membrana e la cartilagine. Quando ſi ſcompongono, e ſi ſciolgono, traſmutanſi in un fosforo nobiliſſimo.

Nelle ſue ricerche ſu le ortiche tanto fiſſe, quanto erranti

esamina il *Reaumur* se vero sia, che toccando questi animali producano in noi quel molesto prurito, che produce la pianta che porta un tal nome, siccome hanno scritto gli antichi, i quali per questo appunto gli hanno caratterizzati col nome di *ortiche*. Quantunque però egli non si opponga direttamente a un tal sentimento, afferma tuttavia che le ortiche sperimentate da lui non hanno mai cagionato un simile effetto. Era troppo naturale che anche su di un tal punto soddisfar volea la mia curiosità. Senza però dar torto al Naturalista Francese, dirò che gli antichi Filosofi non si erano ingannati. Vero è che qualche ortica marina, per quanto venga da noi toccata, e stropicciata, si trova innocente. Tale si è quella che ho paragonata ad un fiore di melagrano. E tali sicuramente state saranno le cimentate dal *Reaumur*. Ma è ben diversa l' altra ortica a figura cilindrica, corredata di 90 corna all' incirca. Vo' adunque dire che se questa a toccar venga qualche parte dilicata del corpo, come sarebbe il collo, oppure il volto, produce effetti a quelli dell' ortica niente inferiori. L' ho provato replicatamente in me stesso, e ve ne particolarizzerò le conseguenze, come altresì la cagione efficiente e immediata che le produce. Ed è ben credibile che questa ortica marina non sia la sola a possedere tal rea qualità.

§. XIII.

Picciol granchio, denominato Bernardo l' Eremita

Anche in una singolarità di questo curioso animale non si accorda con la veneranda antichità uno de' più grandi Naturalisti del secolo. Fino a' tempi di Aristotele fu detto, ed è poi stato ripetuto da cento altri, che una specie di granchietto marino per avere la pelle dell' abdome non già dura e crostosa, come quella degli altri suoi simili, ma mollissima e dilicatissima, va a nasconder si e a vivere dentro alla prima chiocciola vuota che trova; dal che ha poi tratto il nome di *Bernardo l' Eremita*, per la profonda solitudine nella quale vive là dentro. Questa antichissima opinione, che anche oggigiorno non lascia di avere i suoi seguaci, è stata forte-

mente impugnata col valido mezzo della notomia dallo *Swammerdamio*, la cui autorità sola in somiglianti materie può valere per mille. Egli adunque pretende che la conchiglia ossia il nicchio, dentro cui alloggia questo picciol granchio, non è stato altrimenti da lui usurpato, ma è suo proprio, in quella guisa medesima che è loro proprio il nicchio degli altri testacei. Conciossiachè a quel modo che il nicchio di questi rimane attaccato, e come immedesimato al loro corpo per via di produzioni tendinose; così mediante un simil legame questo granchietto si trova attaccato, e come incorporato al nicchio, dentro cui soggiorna: nè lascia l' Olandese Naturalista di assegnare il sito preciso di questo attaccamento, facendo nel tempo stesso le maraviglie come tal cosa non sia stata da altri osservata. Quel fatto adunque che dai Naturalisti si ammetteva per sicurissimo, viene per lo meno con questa osservazione a rendersi incerto, e dubbioso, e l' incertezza e il dubbio si accrescono da un' altra osservazione del medesimo celebre Fisico, la quale si è che quegli tra nostri granchietti, che sono della medesima specie, si trovano sempre rinchiusi in conchiglie fra loro consimili.

I siti del golfo contigui alla terra, e poveri d' acque formicolano di una immensità di bernardi eremiti. E come dunque non dovevano invogliarmi ad entrare io pure in questa disamina, per accertarmi co' proprj occhi se le ragioni mosse dallo *Swammerdamio* veramente sussistono? L' ho fatto effettivamente, quantunque poi allettato dalla materia contentato io non mi sia di questo solo, ma ho voluto estendere le mie ricerche più in là, coll' indagare ciò che si osserva di più curioso, e più importante intorno agli andamenti, e alla vita di questi minuti crostacei, tanto allorchè si trovano nel natio loro elemento, quanto ogni qualvolta ne sono fuora; come pure ciò che loro accade, facendoli uscire del guscio, e riconsegnandoli all' acqua, oppur tenendoli in terra; a far breve ingegnato io mi sono di abbozzare la naturale loro storia, che assolutamente mancava. Della quale storia però per amore di brevità non farò qui punto parola, ma accennerò soltanto alcuni fatti, da cui apparirà, come mi lusingo, che il più volte lodato Olandese da una seducente apparenza è stato indotto in errore. Primieramente quantun-

que i bernardi eremiti da me osservati fossero tutti della medesima specie, non lo erano però le conchiglie albergatrici, che anzi bene spesso si scorgevano di genere fra loro diversissimo. In secondo luogo quelle conchiglie della stessa specie, o di specie diversa che in un sito del mare allogavano dentro loro questi granchietti, in altro sito le medesime contenevano dentro vivo il loro animale. Da questi due fatti chi non vede adunque che di quelle conchiglie si erano impadroniti i nostri granchietti, per essere rimaste vuote per la morte de' naturali loro animali? La qual verità viene a rendersi più manifesta e palpabile dalla considerazione di queste medesime conchiglie, dentro cui annidavano i nostri piccioli Diogeni, altre delle quali si osservavano logore, e talvolta in più d' un luogo bucate, altre nella superficie esteriore spogliate della liscia loro corteccia, altre mancanti d' un terzo, ed anche della metà della parte superiore. Finalmente non tutti questi granchietti erano abitatori delle conchiglie, ma ne trovava pur diversi della stessa specie rincantucciati o negli screpoli degli scogli subacquei, o in alcuni pezzetti di canna, gittati o caduti a caso nel mare, e immersi in parte nel fango, o infine nei fori delle pietre, prodotti da' vermi litosagi.

Ma come dunque conciliar queste mie osservazioni con l' altre dell' Olandese Anatomico, per cui si ricava la forte adesione di questi granchietti col nicchio che li rinserra? Rifletto primamente che i suoi esami sono stati instituiti intorno a questi animali, essendo già morti, e conservati da qualche tempo nello spirito di vino. Rifletto secondamente che per attestazion sua non tutti, ma alcuni soltanto si vedevano attaccati al guscio verso la metà del loro corpo (*a*). Ho voluto cavarmi la curiosità d' immergere nello spirito di vino diversi di questi crostacei quando eran vivi, e dopo più giorni d' immersione avendoli estratti, ed espiati dentro al loro guscio, ho trovato presso a poco quanto dice lo *Swammerdamio*. Alcuni adunque per quella protuberanza stessa, e che è posta verso la sommità dell' abdome (la qual protube-

(*a*) Bibl. Natur.

ranza è per lui il ſito che lega l' animale al guſcio) ſi vedevano attaccati all' interno del guſcio ; ma eſaminando bene quell' attaccamento , dava eſſo chiaramente a conoſcere, che non proveniva già da alcuna appendice tendinoſa o muſculoſa, ma bensì da un ſuco alcun poco viſcido , ripoſto ſu quella protuberanza, il qual ſuco probabilmente era ſcaturito da lei. E di vero ſe quell'attacco derivaſſe da muſcoli o tendini, come non dovrebbe manifeſtarſi più chiaramente in queſti animali quando ſon vivi ? Eppure niente di queſto ſi oſſerva. Ho rotto con ſorti mollette una infinità di queſti guſci per la parte della loro apertura oſſia bocca , ſtaccandone a poco a poco dei pezzetti, finchè arrivava al naſcoſto granchietto , e a quella protuberanza carnoſa , ſenza che abbia mai queſta trovata una ſola volta attaccata al guſcio . Solamente per eſſere queſta particella più riſaltante dell' altre vedevaſi in maggior contatto col medeſimo guſcio; e queſta probabilmente è la ragione per cui dopo la morte del granchietto ſi trova talvolta in qualche adeſione coll' interna faccia del guſcio. Que' minuti granchi adunque, quando io andava via via per la parte ſuperiore rompendo le portatili loro caſette, erano liberi affatto dentro di eſſe: e da ciò naſceva che di mano in mano, che per i pezzetti tolti rendeva le caſette più picciole , coloro diſcendevan più baſſo , in tanto che in ultimo li trovava rannicchiati nel ſondo : il che non ſarebbe accaduto ſe verſo la metà de' loro corpi ſtato vi foſſe con le caſette quel ſuppoſto tenace vincolo . Se poi in vece di rompere con le mollette la parte ſuperiore del nicchio , rompeva l' inferiore, ſenza offendere l' interno ſolitario, non indugiava egli ad uſcir per la bocca, e a fuggire, altra pruova egualmente dimoſtrativa, che egli da neſſun legame colà dentro era attaccato. Da ultimo ſe ai granchietti eſpulſi dai guſci ne offeriva dentro all' acqua degli altri già vuoti , taluno ſe ne impadroniva , e viveva nel nuovo come viſſuto aveva nel vecchio.

§. XIV.

Mitili litofagi, vulgarmente chiamati dattili.

Queſto marino animale non ſi dee confondere con un altro che porta altresì il nome di dattilo, e che *folade* anco ſi appella. Il guſcio del primo riſulta di due pezzi, e quello del ſecondo di tre ſenza che queſti due animali nell' organiſmo ſono affatto diverſi. Il noſtro dattilo, così forſe chiamato per avere qualche ſomiglianza con le frutta delle palme, l' ho trovato prodigioſamente moltiplicato in Iſtria vicino a Rovigno, ed ho pur veduta la ſteſſa abbondanza nel golfo della Spezia. Vien ripoſto dal *Linneo* nel genere dei mitili, e da lui chiamaſi *litofago*, quaſi *mangiapietre*, perchè ſta ſempre imprigionato dentro di eſſe. Non evvi ſcoglio o pezzo di ſcoglio ſottoſtante all' acque del golfo, che forato non ſia da queſto teſtaceo, e che non ne racchiuda ben molti. Potete immaginarvi, dottiſſimo amico, quanto un tal vivente sì poco finora eſaminato, e per la ſua ſingolare maniera di vivere tanto meritevole di eſſerlo, punto abbia la mia curioſità. Con l' eſemplo delle foladi, viventi eſſe pure dentro gli ſcogli, e che per le giudizioſe oſſervazioni del *Reaumur* ſappiamo che vi ſono entrate allorchè quegli ſcogli eran teneri, ſi preſenta come da sè la ricerca, ſe lo ſteſſo debba penſarſi de' noſtri dattili. Il contrario però è ſtato deciſo da due celebri Naturaliſti, *Vallisneri*, e *Fortis*; e ſe tuttavia intorno alla loro deciſione rimaneſſe qualche dubbietà, io ſarei al caſo di toglierla, avendo molti e irrefragabili fatti che i noſtri dattili foran le pietre già dure duriſſime. Delle tante queſtioni però che intorno ad eſſi venir poſſono in mente de' Fiſici, queſta mi par l' unica che ſia ſtata ſciolta. Se i dattili bucano gli ſcogli nello ſtato già petroſo, quale dunque ſarà lo ſtromento o il mezzo che praticano per far ciò? Si valgono forſe di piccioli denti oſſei, come fanno le brume che trivellano le tavole de' baſtimenti? O più veramente della parte anteriore del guſcio, in quanto che ſtropicciando con eſſa del continuo la pietra, giungono con l' andar del tempo a logorarla, e ad aprirla? O dobbiam piuttoſto

pensare che anzi che essere un corpo solido quello che fora, sia un corpo fluido, voglio dire un liquore stillante dalla bocca dei dattili, il quale essendo per ventura acido sciolga a guisa d' acqua forte le parti petrose che tocca? Ma si hanno veramente prove accertate di un tal liquore, e d' altronde gli scogli che ne vengon forati sono proporzionati ad esso liquore, cioè a dire sono calcari? I dattili forano le pietre per mangiarle, come per un fine analogo si bucano i legni dalle brume, e dai tarli? Ovvero que' fori a null' altro son destinati che a dar loro ricovero, e asilo, nutrendosi piuttosto di sostanze animali o vegetabili introdotte là dentro dall' onde del mare? Ma quelle petrose cellette mettono veramente all' esterna superficie dello scoglio, e comunicano col mare per via di qualche patente forellino? Si presume che i dattili sieno ermafroditi, per non trovarsene mai che un solo in ciascuna nicchia. Ma è egli dimostrato che queste nicchie non s' incontrano mai? Il sessualismo ha luogo in questi animali? Quanto con lungo volger degli anni sogliono essi internarsi nel sasso? Si trovano liberi i dattili dentro alle tane, oppure attaccati ad esse per qualche legame? Ed avendo io trovato che ogni dattilo per via di due appendici tendinose, che escono da lui, e s' attaccano robustamente a due siti della celletta, non è quivi entro mai libero, che gli accadrà dunque se vengano a recidersi queste appendici? Che gli accadrà se venga tolto da quell' amato covile, e abbandonato all' acqua del mare? Si metterà egli di nuovo a forare la pietra? Nati appena che sono i dattili, si danno eglino subito a fabbricarsi le petrose cellette? Le foladi, e vive, e morte sono fosforiche. Si osserva egli lo stesso nei dattili?

Tali sono le questioni che sul mare io proponeva a me stesso, col fine di promuovere la storia fin qui appena cominciata di questi animali, le quali questioni io vorrei credere di avere in massima parte levate.

§. XV.

Torpedini,

La copia di questi pesci, che mi è riuscito di avere sul Mediterraneo, mi ha somministrata la desiderata opportunità di potere accrescere, ed anche rettificare le poche osservazioni, e sperienze ch' io pubblicai l' anno scorso, risguardanti l' elettrica scossa, e diversi altri fenomeni che tendono a perfezionare la naturale istoria di questi maravigliosi viventi (*a*). Qui però conforme il piano propostomi, altro non farò che accennarvi i principali risultati de' nuovi miei tentativi.

Il *Walsch* nella sua prima lettera scritta a *Franklin*, e relativa al presente soggetto, osserva che la torpedine volendo dare il colpo, accompagna lo sforzo che allora fa con una sensibile depressione degli occhi. Paruta essendomi rilevantissima tal circostanza, per venir essa a mostrare che la scossa è dipendente dalla volontà dell' animale, dirovvi che non vi è quasi stata volta che provato abbia la scossa, che i miei occhi non sieno stati fisamente rivolti verso quelli di un tal pesce. Il segno marcato dal valente Fisico Inglese mi si è offerto con la maggiore incostanza. Qualche rara volta nel momento che si avea lo scuotimento, gli occhi s' internavano, è vero, nella loro cassa; ma altre volte per l' opposito ne uscivano: più frequentemente poi se ne rimanevano immobili. Cotesti occhi di forma tondeggiante, quantunque piccioli, risaltano assai bene dal capo. Così risaltanti venivano da me presi di mira fuori dell' acqua ora con l' occhio nudo ora con la lente nel tempo stesso che determinava le torpedini a darmi la scossa, ma per lo più nè quando io la sentiva, nè prima, nè dopo, non appariva in essi il più picciol moto, la più picciola mutazione.

E' stato da me altrove notato (*b*) che in una torpedine, finchè

(*a*) Questo primo Saggio di osservazioni, e sperienze intorno all' elettricità delle torpedini è contenuto nella lettera da me accennata sul principio della presente.

(*b*) L. c.

finchè si mantenne vigorosa, la scossa andò sempre congiunta ad una notabile agitazione del corpo. In queste mie nuove osservazioni ho pur veduta in qualche altra torpedine la stessa cosa. Ma neppur questo si può chiamare un segno o indizio universale e costante. Spesso egli accade che maneggiate si agitano nel modo stesso, ma innocentemente; e con pari frequenza addiviene altresì che restiam da esse colpiti, senza che sensibilmente si muovano.

Venivano da me astrette a starsi in maniera, che eziandio volendolo non potevano muoversi o agitarsi nè punto nè poco: eppure non lasciavan per questo di scuotermi potentemente la mano, e il braccio, e ciò a replicate riprese. La scossa dunque non ha nota alcuna o segnale del corpo, visibile almeno, che ce la possa indicare. E' però subordinata alla volontà, e quasi direi al capriccio dell' animale. Di due torpedini pescate ad un tempo, d' egual vigore, e grandezza, l' una talvolta per quanto sia brancicata, anzi punta, e ferita (non ostante che questi sieno, come vedremo, mezzi efficacissimi per conseguire le scosse) non sarà mai che si determini a darne pur una: quando l' altra tosto che presa venga tra mani ne scaglia ben molte. Avverrà eziandio che taluna dopo l' essersi mostrata sorda a qualunque stimolo, qualche tempo appresso rimaneggiata, vibra il colpo.

La mano purchè d' un pelo sia distante dalla torpedine non soffre punto. Qui il contatto è assolutamente necessario. Sebbene soventemente neppur questo basta, ma vi si richieggon gli stimoli, anzi le ferite. Il più delle volte adunque le torpedini che semplicemente toccate non danno commozione di sorta, si obbligano a darla premendole con la mano, e stuzzicandole: e con tai mezzi si astringono pur qualche volta a vibrarla quelle di nuovo, che cessato aveano dopo l' essere state replicatamente tocche. Le punture in fine, e molto più i piccioli tagli fatti qua e là agli organi elettrici sono stimoli potentissimi per richiamare le scosse, in quelli eziandio tra nostri pesci che, per esser restati lungamente fuori dell'acqua, perduta hanno buona parte del lor vigore: e se la punta delle forbici o del coltello seguirà così a tormentarli, seguiranno eziandio le scosse, e queste fortissime, a farsi sentire. Proseguendo in tal guisa, e non interrottamente, a malmenar

gli organi, giunto ſono a numerare 23 ſucceſſive ſcoſſe, ſenza che l' ultime parute mi ſieno meno violente delle prime. L' ammaccamento dei detti due organi fatto dalla gagliarda compreſſion delle mani produce però il medeſimo effetto, e queſto effetto dura finchè non ſieno conſiderabilmente ſchiacciati, che allora le ſcoſſe, prima alla mano moleſte, ſi fanno picciolissime e quaſi inſenſibili.

Sembra eſſer regola non ſoggetta a eccezioni che l' intenſità della ſcoſſa ſta in ragione diretta della grandezza dell' animale. Sta eziandio in ragione del vigore del medeſimo, purchè quella non ſi ecciti per via di qualcuno dei ſoprammentovati ſtimoli, che allora un individuo eſtremamente illanguidito può renderſi abile a dar colpi fortiſſimi. Se l' individuo però col ridonarlo al nativo elemento ripigli le forze primiere, che perdute avea col tenerlo fuori di eſſo, ſi ripriſtina in lui la naturale attitudine per le ſcoſſe.

Diſſi già altrove, ed altri detto lo avevano prima di me, che quelli che chiamati hanno *muſcoli falcati* della torpedine, e più acconciamente *organi elettrici*, ſono la ſede verace della ſcoſſa. Ma queſta è ella egualmente forte per tutto? Ho trovato che è maſſima, dove è maſſima la groſſezza degli organi, e in conſeguenza vicino alle branchie. Scema ella poi di forza in ragione che ſcema tale groſſezza. Quindi al lembo dei medeſimi è minima.

Se la faccia inferiore degli organi venga toccata da una mano, e la faccia ſuperiore dall' altra, frequentemente la ſcoſſa o ſi prova ſoltanto per diſopra, o provandoſi ancor per diſotto, quivi è minore. Se poi la faccia inferiore ſi freghi o in altro modo s' irriti nel tempo che la ſuperiore ſolamente ſi tocca, la prima ad eſcluſione della ſeconda ſuol dare la ſcoſſa (*a*). In entrambi i caſi però ſuccedono delle irregolarità, delle apparenti ſtranezze che crederò degne di riferire nella mia Opera. Quando poi la ſcoſſa ſi ottiene da ambedue le faccie, ſenteſi ſempre nel medeſimo punto di tempo.

Ma qui cadevano due ricerche, a mio avviſo, importantiſſime. Si ha la ſcoſſa, toccando una ſola faccia? Toccando

(*a*) Per faccia inferiore s' intende quella che corriſponde al petto, e per faccia ſuperiore quella che corriſponde alla ſchiena.

contemporaneamente i due organi, ſuccede egli che la ſcoſſa ſi provi da un ſolo? Quanto al primo, io riſpondo affermativamente: ſoltanto aggiugnerò che la ſcoſſa lanciata da una ſola faccia ſuole eſſer più debole, che quando lanciata viene da due. Per conto poi del ſecondo, o ſi tocchino i due organi in una ſola faccia, o in tutte e due, ordinariamente la ſcoſſa ſembra ſpiccarſi egualmente, e nel tempo ſteſſo dall' uno e dall' altro. Pure v' ha delle volte, e queſte non tanto rariſſime, che nel tempo che un organo agiſce, l' altro rimane ozioſo. Ciò è ſtato replicatamente da me provato con la palma della mano ſpiegata ſu la faccia ſuperiore dei due organi, ma l' ho ancora con maggior preciſione ſperimentato, toccando nella medeſima faccia un organo col pollice, e l' altro organo con l' indice della ſteſſa mano, poichè mi ſi comunicava la ſcoſſa ad un dito, ſenza che ſi comunicaſſe punto all' altro. E ciò non di rado mi è accaduto, ſe irritando un organo, non facea che contemporaneamente toccar l' altro, quaſi che il primo con la ſcoſſa cercaſſe di vendicarſi, il che non facevaſi dal ſecondo, per non eſſere ſtato punto offeſo.

I riſultati fin quì menzionati partono da tentativi quaſi tutti inſtituiti ſu le torpedini laſciate nell' acqua. Dirovvi però che i medeſimi ſono ſtati da me ripetuti nell' aria, ſenza che trovato vi abbia altro divario, fuorchè qui le ſcoſſe erano più gagliarde.

Udito che avete gli addotti riſultati, piacciavi di ſentire anche i ſeguenti. Sono relativi a torpedini cimentate tutte nell' aria. Se eſſendo io iſolato toccava in una ſola faccia una torpedine non iſolata, leggeriſſima era la ſcoſſa ch' io ne ſoffriva, ma queſta era fortiſſima, toccando entrambe le faccie. Nè più nè meno accadeva, ſe oltre l' eſſere iſolato io, lo era pur la torpedine. La leggiere ſcoſſa però in ambi i caſi provata avea luogo ſoltanto, vigoroſiſſimo eſſendo il peſce. Diverſamente più non ſi ſentiva, e allora per provare la ſcoſſa mi era d' uopo contemporaneamente l' una e l' altra faccia toccare. Che ſe queſto circolo io veniva ad allungarlo mediante un altr' uomo, egli pure iſolato, il quale con una mano toccaſſe una faccia della torpedine, nel tempo ch' io l' altra faccia toccava, tutti e due ſentivamo la ſcoſſa non

solo alle mani toccanti l' animale, ma all' altre due insieme intrecciate per l' allungamento del circolo. Nel caso poi dell' isolamento di me, e della torpedine, più d' una volta mi è accaduto, che toccando con due dita della stessa mano i due organi alla medesima faccia, io qui pure provava la scossa da un organo senza provarla dall' altro. Questa scossa poi, che era assai piccola, non oltrepassava il dito che la provava.

Se i fatti fin qui allegati provano bastantemente, che la virtù dolorifica dei nostri pesci parte da un principio elettrico, i seguenti mi sembrano atti a persuaderlo anche di più. Cotesta virtù non si è mai trasfusa alle mie mani, toccando il pesce per via d' un coibente, quale si è un corto cilindro di ceralacca. Ma si è bene trasfusa, valendomi di un deferente, voglio dire di una chiave, di un chiodo, o di altrettale corpo metallico. Questi due fatti diversi gli aveva prima di me osservati col medesimo esito il chiarissimo *Walsch*. L' ultimo fatto però che risguarda i corpi deferenti accorto io mi sono che bisogna intenderlo con le dovute limitazioni. Primieramente la scossa non è qui mai sì gagliarda, come toccando immediatamente il pesce. In secondo luogo perchè si abbia, è necessario che in sè sia fortissima: e però quasi sempre è nulla, toccando con qualche deferente le torpedini molto infiacchite. Uno sciugatojo, un reticello, un fazzoletto, ravvolgenti a più doppj il corpo della torpedine, tramandano la scossa alla mano, se sono bagnati: ma per nessun conto, se sono asciutti, non ostante che sieno di canape o di lino. Per l' opposito un velo d' olio d' oliva che copra le due faccie, oppur una degli organi elettrici, quantunque in sè coibente, non impedisce la scossa. Cotal fluido però in tal guisa assottigliato non la impedisce tampoco nella elettricità artificiale.

I risultati fin qui addotti sono a mio avviso i soli abili a mostrare la massima analogia tra i fenomeni elettrici e quello della torpedine, giacchè niun altro fenomeno ho io potuto trovare, che m' indichi il principio elettrico. Non cenno di scintilla nella più profonda oscurità, non istrepito di sorta, non venticello, non attrazione, e repulsione di corpi leggieri, niuno indizio di carica nella boccia leidese messa a contatto con la torpedine isolata e vibrante le scosse, niun

ſegnale di elettricifmo in me iſolato, e tenente tra le mani il peſce quando ſcagliava i colpi.

Veduto avete che le ſperienze del primo mio ſcritto contrariavano a quelle del Sig. *Schilling*, volente che la calamita attragga le torpedini in quella guiſa che tira a sè il ferro. Ripetute avendole aſſaiſſime volte, e con la maggior attenzione per via d' una calamita potentiſſima, che teneva attaccato un peſo di 25 libbre, queſte novelle eſperienze non mi hanno moſtrato niente di più delle prime. La calamita accoſtata ai noſtri peſci, e poſta ancora in contatto con loro, dava quel ſegno di attrazione che darebbe avvicinandola a un mattone o ad un legno. Vi dirò bene che per eſſere artificiale, aveva la poſſanza di tradurre al mio corpo la ſcoſſa elettrica.

Prima ch' io finiſca di ragionarvi di queſte ſcoſſe voglio con brevità trattenervi ſopra alcune ſingolari novità atte ad accreſcere la voſtra attenzione. Nel citato mio ſcritto ragionando delle ſcoſſe elettriche, dico che nell' avvicinarſi il peſce alla morte ſi traſmutano queſte in una continuata batteria di leggeriſſimi colpi, che finiſcono col finir della vita dell' animale. Un ſimil ſenomeno mi ſi è manifeſtato di nuovo, ſe non che perite le torpedini, mi ſono accorto di un altro fenomeno più maraviglioſo ancora e più ſtrano. E queſto è che la batteria quantunque in ordine all' eſſer doloroſetta alla mano, termini affatto col terminar della vita animale, ſeguita però per più ore ad averſi alla maniera di un ſemplice polſo. Se la mano adunque, morta affatto che ſia la torpedine, premerà i ſuoi organi, ſente un battito frequentiſſimo e regolare, ſimile a quello del cuore, e lo ſente in tutta l' area degli organi, ſe non che in vicinanza delle branchie, cioè a dire dove ſono eſſi più groſſi, è più vigoroſo. In altre parti poi della morta torpedine non ſi ſente nulla. Il fenomeno è lo ſteſſo, e dentro l' acqua, e fuori. Di più non viene eſſo a toglierſi, reciſi che ſieno dalla torpedine gli organi. Dopo alcune ore da che è ſeguita la reciſione, dura ancora la batteria, e traſcorſo poi ulterior tempo va a perderſi. La mano la ſente con diſtinzione tanto nella faccia ſuperiore, che nella inferiore. Se uno degli organi che pulſano ſpogliato venga della pelle che nella faccia ſuperiore lo

copre, quaſi di ſubito la batteria ſi ſminuiſce, poi ſi fa nulla. Accorto eſſendomi di queſte particolarità in una torpedine, le ho verificate in cinque altre col medeſimo ſucceſſo. Perchè poi non ſi aveſſe a penſare, che qualche ingannatrice apparenza mi aveſſe impoſto ſu di queſto fatto, per accertarmene ho uſato, come ſentirete, le maggiori circoſpezioni, e cautele.

Ma ſe haſſi quella batteria, e per più ore continua ad averſi negli organi ſtaccati dalle torpedini morte, che accaderà in eſſi, ſtaccati che ſieno dalle vive?

Il tentativo era troppo curioſo per non eſſere inſtituito. Comechè adunque ne vengano ſcelte di quelle, i cui organi ſono prontiſſimi a ſcagliare le più valide ſcoſſe, queſte ſcoſſe ciò non oſtante ceſſano ſubito che gli organi mediante il taglio rimangono ſeparati dall'animale. La mano tuttavia, che allora li comprime, ſoffre da prima un informicolamento molto moleſto, che poi a poco a poco va ſminuendo, ridottoſi in ultimo a quella ſpecie di polſo o innocente batteria, che non finiſce ſe non dopo qualche ora. Le torpedini così ſpogliate de' loro organi ſeguitano a vivere, ed a nuotare per qualche tempo; dal che appariſce che non ſono eſſi di prima neceſſità alla vita; rendonſi poi inette alla ſcoſſa, ed era ben facile il preſagire che queſto doveva ſuccedere: che anzi private di un ſolo organo, non danno bene ſpeſſo neppur la ſcoſſa dall' altro. Siccome però talvolta avviene il contrario, così ſempre più rimane dimoſtrato che ciaſcun organo da sè è dotato di queſta virtù.

Tre gran tronchi nervoſi riceve dentro di sè ogni organo. Che ſarà egli ſe uno degli organi ſi ſtacchi col taglio dal peſce per l'intiera porzione dove mettono queſti nervi, laſciando il rimanente dell' organo tuttavia unito al corpo? Anche queſta prova mi parve degniſſima d' eſſer tentata, l'eſito della quale ſi fu la ceſſazion d' ogni ſcoſſa all' organo così offeſo, non oſtante che ſottentraſſe però quel formicolamento di ſopra accennato.

Io diſſi già che nell' atto che ſi ha la ſcoſſa gli organi ſoventemente rimangono immobili. Non facea però allora che premerli, che palparli. Trovandomi adeſſo in queſte nuove eſperienze ho voluto ſottoporli a cimenti più forti. Sentire-

te in quante e quanto diverſe maniere gli ho tormentati col tagliente metallo, per veder pure ſe l' elettrico colpo veniva preceduto o accompagnato da qualche tremito o commozione, o ſcuotimento o contrazione delle parti componenti gli organi: a far breve quale ſi era allora la material mutazione cui andavan ſoggetti coteſti organi. Nè ho laſciato di eſplorarli per fino col microſcopio ne' momenti che precedevano, che accompagnavano, e che ſeguivan la ſcoſſa. Ma debbo dirvi con illibato candore, che accorto mai non mi ſono del più picciolo movimento di parti, ſe ſi eccettui quell' univerſale agitazione del corpo, non ſempre però, come ho già detto, compagna fedele del colpo elettrico. Dirovvi di più che tormentati gli organi elettrici con diverſi e potenti ſtimoli, non mi hanno manifeſtata quella proprietà che caratterizza il muſcolo vivo.

Tali ſono i riſultati più principali di mie oſſervazioni relativi a queſto ſtraordinario fenomeno delle torpedini, riſerbandomi poi nel mio libro a corredarli delle neceſſarie pruove, come pure a trarne quelle teorie, che giudicherò più confacenti alla verità, e più proprie ad illuſtrare queſto ſoggetto *Fiſiologico-elettrico*.

Le maſſime fra le torpedini da me eſaminate erano lunghe all' incirca 18 pollici, e larghe 8. Le loro ſcoſſe quantunque inſtantanee mi erano alquanto tormentoſe, e ſi ſtendevano fino al petto. Quelle poi delle torpedini minori mi riuſcivano meno incomode. Crederò di aver prove dirette per far vedere, che la ſcoſſa è quell' artificio che uſano le torpedini per impadronirſi di que' peſci, che loro ſervono di cibo. Ho poſto ogni ſtudio per venire a lume de' loro andamenti, de' luoghi che ſogliono abitare, e dove coſtuman occultarſi per aſpettare al varco, e predare i peſci di gran lunga più vivi al moto, e più leſti di loro.

Il modo onde le torpedini propagano la ſpecie è ſtato un altro oggetto non indifferente alle mie ricerche. Nella lettera già pubblicata moſtrato aveva che le torpedini quantunque ſieno vivipare, in quanto che partoriſcono i feti, hanno però le uova come gli animali ovipari. E queſta verità con le mie nuove oſſervazioni l' ho amplamente confermata. Quivi aggiugneva che trovato avendo alcuni feti nell' utero di

una torpedine, si vedevano questi feti attaccati mediante il funicolo ombelicale alle interne pareti dell' utero. Mi accorgo adesso che questa proposizione vuole essere rettificata. Vero è che ulteriori esami mi hanno pur mostrato in qualche feto l' attaccamento di detto funicolo all' utero; ma questo attaccamento è accidentale, in quanto che solendo gemere dall' utero un umore vischioso, in grazia di esso l' estremità del funicolo opposta all' altra, che si collega col feto, quivi rimane attaccata. Del rimanente il funicolo ombelicale, discese essendo le uova dall' ovaja nell' utero, si vede essere per una estremità attaccato all' uovo, o a dir meglio continuato con lui; giacchè questa continuazione si pruova manifestissima. Detto funicolo costa di due cose, di un invoglio esteriore membranoso, e di un canale interno pur membranoso. Ora l' invoglio esteriore non è che una continuazione dell' esterna membrana dell' uovo, e il canale interno che una continuazione della membrana interna dell' uovo suddetto. Il funicolo poi dall' altra estremità è pure continuato col feto, in quanto che l' invoglio esteriore è una espansione o continuazione della pelle di lui, e il canale interno una continuazione dell' intestino. Ecco adunque come l' uovo, e il feto, mediante il funicolo ombelicale, sono tra loro continuati, o ciò che torna lo stesso, formano un tutto solo. Ma per le replicate mie osservazioni le uova delle torpedini esistono già nell' ovaja assai prima che fecondate sieno dal maschio, mentre quando dall' ovaja calano nell' utero le uova già mature, e della grossezza circa d' un rosso d' uovo di gallina, ad essa ovaja ne rimangono attaccate altre picciolissime e acerbe, destinate a maturare, e a propagare la specie il seguente anno; e queste uova acerbe sono pure avvolte dalla medesima doppia membrana, che nelle mature fa un tutto col feto; dunque i feti preesistono alla secondazione delle femmine in questi animali. Ecco adunque nella presente scoperta un novello argomento dimostrativo della preesistenza dei germi. Il Barone *Hallero* avea mostrata tal preesistenza negli uccelli; io in diversi amfibj; e presentemente ho il compiacimento di mostrarla nelle torpedini; ed è ben presumibile, che questo non sarà solo tra pesci, in cui verrà a palesarsi la medesima luminosa verità. Nel tempo che nell' utero appariscono

pariſcono alcuni feti nel modo indicato, ſe ne veggono altri, che per eſſere più vicini al naſcere hanno già conſunta la ſoſtanza tutta dell' uovo: ed è taluno di queſti che col funicolo rimane qualche volta caſualmente attaccato alle pareti dell' utero.

Finalmente l' anatomico eſame degli organi elettrici non dovea per neſſun conto eſſere ommeſſo. Vedendo però che per farlo come meritava, richiedeva una mano maeſtra, prevaluto io mi ſono dell' opera d' un mio Amico, e Collega, ſpertiſſimo in Notomia, che con riconoſcente animo nominerò, come pure due altri celebri miei Colleghi, che a queſti dilicati lavori anatomici favorito mi hanno d' intervenire. Veduto avete quanto intorno a queſti organi era ſtato ſcoperto dal chiariſſimo *Hunter* dietro alle tracce ſegnate dai due noſtri Italiani, *Redi*, e *Lorenzini*, ma vedrete quante altre inaſpettate novità ſi naſcondevano dentro di eſſi, e qual magiſtero, qual arte ſpicca in queſte ſingolariſſime macchinette.

§. XVI.

Pungolo della Paſtinaca.

Per affermazione degli antichi Naturaliſti, ed anche di alcuni moderni, tra quali ſi annovera l' illuſtre *Linneo*, velenoſiſſimo ſi è il pungolo, onde porta armata la coda queſta ſpecie di razza (*a*). Ed un tal ſentimento è pure altamente radicato nella gente di mare, così che ſarebbe più facile ſtrappare la clava ad Ercole, che rimoverla dal medeſimo. Tenendo però dietro a queſta perſuaſione del popolo, io ho veduto che ſuole appoggiarſi a fatti la maſſima parte dubbioſi ed incerti; nè mi ſembrano più meritevoli d' eſſere aſcoltati i Filoſofi, per riferirſi quaſi ſempre ai racconti de' peſcatori, ſenza avere mai verificati queſti racconti con le proprie eſperienze. Il Mediterraneo abbonda di paſtinache. Frequentemente uſcendo del golfo co' peſcatori io ne vedeva diverſe reſtar prigioniere nelle lor reti. Oſſervava il riſerbo grande che

(*a*) Raja Paſtinaca. Lin.

essi avevano nel maneggiarle, e la prontezza nel recidere ad esse il dentato pungolo osseo, e gettarlo in mare. Come adunque non doveva io accendermi in voglia di esaminar questo pungolo, creduto tanto velenoso, e di tentare con esso qualche esperimento, giacchè altri Fisici, a mia notizia, fatto non lo avevano prima di me? Sentirete adunque nel mio libro e la descrizione di quest' arma, che certamente per un tal pesce è terribile, e il modo con cui sa vibrarla, come altresì varj tentativi da me intrapresi con la medesima, facendo ferir più animali, sì a sangue freddo, che a sangue caldo, e sempre quando le pastinache eran vive. Sentirete pure che l' arma suddetta non ha niente di velenoso, e che tutto il male che cagiona, e che certamente nelle pastinache di gran corpo può essere considerabilissimo fino a produrre talvolta in noi stessi la morte, è un puro effetto della meccanica sua struttura, in grazia della quale penetra facilmente le carni, e volendo levarla, irreparabilmente le strazia. S' inganna dunque a partito il *Linneo* quando decanta il veleno di questo pungolo, a persuadere il quale, oltre al ricorrere ai vecchi filosofanti, e ai moderni, produce un genere non più inteso di pruove, cioè a dire l' autorità della Favola: *Caudæ aculeus venenatus Veteribus & Recentioribus*, *fato Ulyssis clarus*. Così egli nel suo Sistema della natura: e in altro luogo del medesimo libro afferma pure che detto aculeo è velenoso, come per lui è velenosa la torpedine; parlando però del qual ultimo pesce quanto il Naturalista di Upsal si allontani dal vero, credo di averlo à chiare note mostrato nella più volte citata mia lettera. Nel visitare internamente le pastinache ho pur trovato esser falso, ch' elleno corredate sieno di polmoni, siccome vuole lo stesso Autore, non avendo che le sole branchie per respirare. Questi errori del *Linneo*, ed alcuni altri nel decorso della presente lettera per me notati, mi si sono offerti, pensando a tutt' altro che a criticare un sì rinomato Naturalista. E lo stesso è stato di altri non pochi relativi ad altre produzioni marine, i quali errori, cadendo l' opportunità, non esiterò di palesare, parendomi che pel vantaggio della società delle lettere i falli degli uomini grandi non debbano esser taciuti, affinchè l' autorità di chi gli ha commessi non induca altri in errore.

§. XVII.

Miscellanee.

Animalucci infusorj marini. A quel modo che l' acque dolci, in cui vengono a macerarsi, ed a sciogliersi sostanze vegetabili ed animali, abbondano di questi microscopici viventi, ne abbondan pure le acque salsugginose del mare. Que' siti singolarmente dove queste impaludano, e dove a motivo della poca profondità le piante subacquee si scompongono e periscono, formicolano di tai minuti animali. Il medesimo fenomeno succede nell' acqua marina rinchiusa ne' vasi, dove accade lo scioglimento delle sopraccennate sostanze. Ma quali sono le leggi naturali, cui soggiacciono gli animaletti infusorj del mare? Sono elleno le stesse che quelle degli animalucci infusorj dell' acque dolci? Questi ultimi moltiplicano la specie parte per divisîon naturale del proprio corpo, parte perchè altri sono ovipari, altri vivipari (*a*). Come succede la moltiplicazione nei primi? In moltissime cose l' analogia per l' una parte, e per l' altra qui non poteva esser maggiore.

Vermi litofagi. Oltre all' immenso numero di animali grandi e piccioli, disseminato nell' acque del mare, i fanghi, le arene, gli scogli, e le pietre subacquee ricettano pure una infinità di abitatori. Ho avuto bastante ozio per esaminarne diversi, ma sopra ogni altro intertenuto io mi sono su que' vermetti, che a guisa dei dattili forano le pietre, e vivono dentro di esse, massime per aver costoro fin qui sfuggita la diligenza, e lo studio degli osservatori.

Se la Luna abbia influenza sopra i Testacei, e i Crostacei. Parrebbe che il presente Problema più non meritasse i riflessi del filosofo, se quell' impero, che sembrava per sempre tolto a questo pianeta, sforzato non si fosse di fargliela riacquistare qualche dotto Moderno. Se però la Luna stendesse mai le sue leggi su i testacei, e i crostacei marini, bisognerà dire che gli osservati da me sono sudditi refrattarj.

(*a*) Miei *Opuscol. di Fis. Anim. e Veget.* Vol. I.

Passaggio de' Pesci , e qualità di quelli che si prendono al golfo , e nelle sue adjacenze . Anche questi due oggetti ho creduto meritevoli di considerazione ; e siccome nel mio soggiorno colà io non poteva raccorre tutte le cognizioni di che abbisognava , così ho dovuto consultare i pescatori più sperimentati , quelli sopra tutto che paruti mi sono più veridici , come pure le poche persone fededegne del paese .

Fondi del mare , e se la superficie di questo si alza , o si abbassa . Notabile è l' osservazione del celebre *Donati* , che il fondo dell' Adriatico è rivestito d' una crosta della grossezza di molti piedi , formata di crostacei , e testacei , e di corpi polipiferi ; mescolati alla terra , e all' arena , e in massima parte impietriti ; dalla qual crosta egli deduce l' alzamento della superficie del mare in que' luoghi , quantunque poi di tale alzamento vengano assegnate da lui altre cagioni . Il fondo del golfo , come pur quello che è fuori delle sue bocche , non ha niente di simile , ma quasi per tutto è fangoso , anche nelle maggiori profondità di 300 , e di 400 piedi , e questo fango è calcare . Ne ho prove sicurissime , come pure che a quelle profondità non nasce mai sul fondo un filo d' erba , nè altro vegetabile , non ostante che ne nascano moltissimi e diversissimi a profondità molto minori , come accade dentro del golfo . La poca influenza della solar luce in que' cupi fondi sarebbe mai la cagione per cui sono sforniti di piante ?

Ma se il tratto di mare da mè esaminato è privo di quella crosta , neppure si hanno argomenti che quivi la superficie dell' acque alzata si sia , che anzi se ne hanno dei contrarj , per cui evidentemente apparisce , che il mare in qualche luogo si rimane alla medesima altezza , e in qualche altro continuamente si abbassa . Parlando adunque del golfo , delle tre isole ad esso contigue , la *Palmaria* , il *Tiro* , e il *picciol Tiro* , come pure di altre adjacenze (siti tutti circondati da scogli , e dove non metton torrenti , nè fiumi) io farovvi vedere per un bellissimo monumento da me scoperto , che quivi il mare si trova presentemente a quella medesima altezza , alla quale si trovava nove secoli fa . Favellando poi delle spiaggie di Carrara , e di Massa , esposte a' più furiosi libecci , non d' altro composte che di minute ghiaje , e di rena , e attraverso alle quali passano più torrenti , che vanno a scari-

carsi nel mare, quantunque tali spiaggie sieno di poche miglia distanti dal golfo, pure del continuo si vanno discoprendo di più per l' incessante allontanamento del mare. E i tristi avanzi del Porto carrarese colà nel 1750 fondato, ed ora dal mare 475 piedi lontano, sono essi pure un incontrastabile monumento benchè recente di tale allontanamento non solo, ma dell' annua misura di esso. Per le sopra esposte circostanze diverse che accompagnano il golfo, e le spiaggie di Massa, e di Carrara comprenderete facilmente la cagione per cui il mare ad onta degli anni conserva in un sito la medesima elevatezza, nel tempo che in altro sito si va del continuo abbassando.

Ed eccovi, illustre mio amico, per appagare in parte le dottissime vostre brame, un compendiato ragguaglio di quanto è stato da me osservato sul mare. Io non so se parlato avendovi quasi sempre di animali, e talvolta anche nuovi, sarò stato da voi inteso tanto che basta per mancanza di figure; le quali però non è già ch' io non avessi in pronto, per essere già state sotto i miei occhi dai vivi animali copiate per opera di un valente disegnatore, ma non essendo ancora incise non potrò produrle che nella pubblicazion del mio libro. Veduto avete che diversi di questi animali sono quegli stessi di cui ragionate nelle immortali vostre Opere. Se le mie giunte avessero la sorte d' esservi utili in qualche modo, stimerei vantaggiosamente ricompensate le fatiche da me sostenute sul mare. Pregovi intanto a volere scusare la soverchia lunghezza di questa mia prima lettera, nata dalla moltiplicità delle cose che per ubbidire a' pregiati vostri comandi proposto mi era di dirvi. Farò d' essere molto più breve nella seconda, che risguarderà gli oggetti montani, e che avrò il piacere di scrivervi subito che le pubbliche mie incumbenze mi permetteranno di farlo.

MEMORIA (*)

Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e sopra quelli di Pietra-Mala *in particolare.*

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nell' Università di Pavia.

QUando nel 1776 ebbi scoperto che da tutti i fondi d' acqua stagnante o leggermente corrente si svolge una prodigiosa quantità di aria infiammabile, prodotta dalla macerazione e putrefazione delle sostanze vegetabili e animali, fui naturalmente condotto a pensare, che molti fenomeni naturali, tra i quali quello dei terreni e delle fontane ardenti, da altro non provenissero che da grandi ammassi di codest' aria infiammabile (*a*). Era troppo facile l' immaginare che potea trovarsi buona copia di tal aria già bella e formata in alcuni ricettacoli o cavità sotterranee, che riempiendosi, o per le pareti che si sprofondassero, o per qualche materia estranea portatavi dentro, obbligavano quell' aria a traspirare ed uscirne fuora in forma di getti attraverso le crepaccie e la terra secca, o attraverso l' acqua in forma di gorgogli. Io mi atteneva tanto più fortemente a questa opinione, quantochè alla possibilità della cosa, alla verosimiglianza di una spiegazione così facile e naturale aggiugnevasi una imitazione non lontana del fenomeno, a cui io era giunto; sendo riuscito ad eccitare a talento sulla superficie delle acque stagnanti simile infiammazione mediante il fruga-

---

(*) Questa Memoria fu dall' autore scritta in francese, e dal medesimo recitata nell' Aprile del 1782 in una pubblica adunanza di una Società letteraria chiamata *Museo di Parigi*, di cui è Presidente il Sig. *Court de Gibelin* celebre per la sua opera *Le Monde Primitif*.

(*a*) *Lettere sull' Aria infiammabile nativa delle paludi*. Milano 1777.

re ſul fondo, e rimeſcolare la melma ad effetto di ſnidarne l' aria infiammabile: il che fatto, non aveva che a preſentare un candelino o un ſolſanello acceſo al luogo dove naſceva il maggior bollicamento cagionato dalle gallozzole d' aria che ſpiccate dal fondo venivano a crepare alla ſuperficie dell' acqua, per far toſto ſorgere una fiamma che ſpandeaſi per una eſtenſione conſiderabile lambendo l' acqua medeſima. Queſta fiamma era di colore azzurro, e continuava ad ardere così lambente e ondeggiante più o men tempo. Un fenomeno preſſo a poco eguale avea luogo ſopra le terre impregnate d' aria infiammabile. Io ſceglieva a tal oggetto un terreno ſangoſo confinante coll' acqua di uno ſtagno, un terreno che foſſe anzi ſtato coperto lungo tempo dall' acqua medeſima, e abbandonato da eſſa e rimaſto in ſecco poco innanzi, cui andava colla mia canna foracchiando là ove era più molle e nericcio. A ſiffatti buchi accoſtando prontamente un zolfino acceſo, la fiamma vi s' appiccava a un tratto, e parte vedeaſi ſcendere fino a lambirne il fondo, parte lanciarſi in aria, maſſime ove io m' aggravaſſi col corpo, o batteſſi de' piedi ſul terreno ad oggetto di ſpremerne l' aria infiammabile in maggior copia.

Dopo tali ſperimenti e prove felici, conſultando diverſe deſcrizioni, che erano ſtate date dei terreni ardenti, e particolarmente quella inſerita nel Giornale di Fiſica dell' Ab. *Rozier* Tom. VI. Agoſto 1775 pag. 224 intorno alla *Fontana ardente* del Delfinato (così chiamata impropriamente, poichè eſſa non è in niun modo una fontana, bensì un terreno ardente), vi riſcontrai una perfetta conformità in tutto, ſalvo due ſole circoſtanze: cioè, che cotal terreno non è ſtato di recente coperto dall' acqua; e che non è neceſſario di ſconvolgerlo, o di ſcavarvi de' buchi col baſtone per iſprigionarne l' aria, la quale è tramandata ſpontaneamente da qualche ricettacolo ſotterraneo, che quivi ſuppongo trovarſi. Per tutto il reſto i fenomeni ſono aſſolutamente i medeſimi, e le circoſtanze ſon tali, ch' egli è impoſſibile il ſuppor ivi la preſenza della nafta o petrolio, a cui ſi attribuivano comunemente le fiamme de' terreni, e delle fontane ardenti. Meno poi ſi potrebbe attribuire il fenomeno a qualſivoglia altro bitume. Non reſta dunque che l' aria infiammabile, che pro-

dur possa tali apparenze; e l' Autore della descrizione citata ce lo dà egli medesimo a divedere assai chiaramente, e ci conduce a ravvisare tal aria nelle modificazioni, negli accidenti, e nei moti che ci dipinge di coteste fiamme, benchè non parli nè faccia pur cenno nel suo scritto di aria infiammabile, l' esistenza della quale, non che l' indole e la natura di essa, dobbiam credere che gli fosse ancora ignota. Se conosciuto avesse tal aria, non sarebbe ito a cercar altro: certo almeno non sarebbe ricorso ad una specie di *piroforo*, prodotto non sa neppur egli come. Il Sig. di *Fontenelle* paragonava questo terreno a un piccolo vulcano: senza fondamento però; giacchè alcun vestigio non vi si è potuto trovare.

In mezzo a tante insussistenti opinioni un antico Autore mi si presenta, il quale si è molto accostato alla verità. Questi è un certo *Dieulamant* ingegnere a Grenoble, che scriveva ha quasi un secolo, il quale attribuisce il fenomeno a un vapore infiammabile che trapela dalla terra, dicendo di non aver trovato nulla nè sulla superficie, nè in seno alla terra medesima, che possa produrre e alimentare le fiamme. Il Sig. di *Montigny* in una Memoria manuscritta, di cui Mr. *Guettard* ci ha dato un estratto nelle sue opere, va più innanzi ancora: egli giunge perfino a dire, che il vapore infiammabile, il quale si fa strada attraverso il terreno di cui si tratta, è simile a quel vapore prodotto dalla dissoluzione del ferro nell' acido vitriolico, che s' accende coll' accostare la fiamma d' una candela alla bocca del vaso. Dal che si fa a congetturare che succeda qualche cosa di simile sotto il detto terreno, mercè l' azione dell' acido vitriolico sopra delle piriti ferrugginose. Egli avrebbe toccato il segno, sostituendo solamente la parola *aria* o *gas* a quella di vapore: ma la differenza solenne tra i vapori propriamente detti e i fluidi aeriformi non era molto nota a quel tempo.. Oltre di ciò tra le arie infiammabili medesime conveniva far distinzione, ed attaccarsi, anzichè all' aria infiammabile de' minerali, a quell' altra specie che si produce dalla macerazione e scomposizione delle sostanze vegetabili e animali: ma questa origine dell' aria infiammabile era allora sconosciuta affatto; e sol dopo la

mia

mia scoperta si può dire che si sia resa veramente palese (*a*).

Ho accennato che la così detta *Fontana ardente* del Delfinato non è altrimenti una fontana, ma un terreno ardente. Vi è però tutta l' apparenza che fosse in altri tempi ricoperto quel terreno dall' acqua, la di cui superficie gorgogliante prendeva fiamma all' accostarle qualsisia altra fiammella. Ciò rilevasi da quanto intorno a questo luogo ci riferiscono alcuni Autori antichi, tra gli altri S. *Agostino*, che non so dove ne parla. Molta probabilità ancora vi s' aggiunge dal vedere che esiste anche al dì d' oggi un ruscello che scorre vicino al luogo ove compajono le fiamme. Avremo occasione di far osservare quanto questa circostanza sia favorevole alla spiegazione ch' io pretendo di dare dei fenomeni di questo genere.

Non entrerò in più minuti dettagli, che poco servirebbero al proposito, contentandomi di avvertire chi li desiderasse, che questi unitamente alle opinioni degli Autori si troveranno nella descrizione della Francia che sta componendo il Sig. Avvocato *Beguillet*, di cui la parte che risguarda il Delfinato è già sotto il torchio (*b*).

Molti fuochi di simil genere si trovano in Italia, che sono stati descritti da diversi. Quelli di *Pietra-mala*, luogo situato sull' alto degli Appennini tra Bologna e Firenze, sono i più celebri e i più conosciuti. Tralasciando tutte le altre descrizioni, potrei attenermi a quella che leggesi nell' opera conosciutissima del Sig. *Ferber*, tradotta in franzese e arricchita di belle note dal Sig. Barone *Dietrich* corrispondente dell' Accademia R. delle Scienze di Parigi (*Lettres sur la Mineralogie d' Italie, et sur divers autres objets de l' Histoire naturelle de l' Italie. Traduites de l' allemand* ecc. *Strasbourg* 1776.) potrei, dico, attenermi a questa descrizione, come la migliore e la più recente, che tanto vi troverei molte apparenze non equivoche, anzi tutti i più certi indizj del-

(*a*) Vegg. le citate *Lettere sull' Aria infiammabile nativa delle paludi*, singolarmente la Lett. III. pag. 64 e la nota sotto.

(*b*) Era sotto il torchio quell' anno 1782, or sarà uscita.

la mia aria infiammabile. Ma voglio più presto riportarmi a ciò che meco confessò l'istesso Baron *Dietrich* poco tempo dopo: quando cioè ebbi la sorte d'incontrarmi con lui in Argentina al principio d'autunno dell'anno 1777. Avendo egli letto poco prima la mia operetta *sull' aria infiammabile nativa delle paludi*, nella quale, non che trovarsi enunciate tali mie idee sopra i terreni e le fontane ardenti, viene di più riportata la descrizione di alcuni fenomeni di questo genere (*a*), non sì tosto ebbe verificate le mie principali sperienze (al qual oggetto ci portammo egli ed io in compagnia d'altre dotte persone a raccorre dell' aria infiammabile da certi fossi, e facemmo altresì la prova d'infiammarla sul luogo, cioè a fior d'acqua), ch'egli convenne in tutto meco, e dichiarò apertamente che i fuochi di *Pietra-mala* da lui e visitati e descritti provenir doveano da simil fonte, cioè da aria infiammabile della stessa specie; che in questo senso or vorrebbe che fosse preso il *vapore sotterraneo* di cui parla, non già per un' esalazione di nafta o petrolio, riflettendo massimamente ch' egli per quanto si studiasse, non avea potuto rinvenire in quel terreno alcun indizio di bitume (*b*); che altri ve lo aveano bene immaginato e supposto, ma solo per non trovar essi altra via di spiegare il fenomeno; imperocchè coloro, i quali finsero a piacimento una specie di vulcano, andarono ancor più lontani, secondo che pensa il Sig. *Dietrich*, dalla vera cagione: infatti niuna forma di cratere, niuna produzione vulcanica nel sito di cui si tratta.

(*a*) Vegg. Lett. II. pag. 20. e segg. nelle note.

(*b*) „ La terra bruna, di cui parlammo, è sparsa su tutta la circonferenza del focolare di *Pietra-mala*. „ Parrebbe ch' ella contenesse qualche „ cosa di bituminoso; stantechè se colla punta del bastone si smove dolcemente, e se ne tira fuori strisciando un pezzo dal circuito ardente, „ le fiamme corrono appresso alla terra pel tratto di un piede circa. Ma „ dall' esperienza, che ho fatto, sono „ persuaso che quest' effetto non proviene che da un resto di vapori contenuti nella terra. Ho messo in una „ storta otto oncie di tal terra bruna; „ le ho dato un fuoco violentissimo; „ la terra è divenuta grigia, s' è riunita in piccole masse, e s' è indurita; ho trovato nel collo del recipiente un sospetto di sublimato acido, e nel fondo di esso un poco „ di flemma, che sentiva decisamente „ l'acido marino. Questa terra non è „ dunque punto bituminosa, e gli effetti non son dovuti che ai vapori „ sotterranei che s' infiammano „. *Dietrich* Op. cit. pag. 421.

Il suffragio del *Baron Dietrich* mi fu, lo confesso, di un gran peso per confermarmi nell' opinione ch' io aveva sempre mantenuta dopo la mia scoperta dell' aria infiammabile nativa. Ad ogni modo per quanto persuaso io fossi della natura dei fuochi di *Pietra-mala*, restavami tuttavia uno scrupolo, cioè che il piacere di far fare una bella comparsa alla mia aria infiammabile non forse mi seducesse; ond' è ch' io non era contento, finchè non mi riuscisse di averne prove incontestabili e dirette. Altronde quand' anche io non avessi più bisogno di queste prove per finir di soddisfare me medesimo sopra tal punto, le vedeva necessarie a convincere gli altri, quelli singolarmenre, che attaccati di troppo ai loro antichi principj, e alle idee cui non possono risolversi di abbandonare, nemici dichiarati di ogni novità, non si arrendono che all' ultima evidenza. Mi proposi adunque di fare sul luogo le osservazioni proprie non solo ad iscoprire la presenza dell' aria infiammabile là dove trovasi il terreno ardente di *Pietra-mala*, in quella copia ch' è richiesta alla produzione de' fenomeni che vi s' osservano; ma ad accertare ben anche di tal aria il continuo sgorgo attraverso la terra, in un colle circostanze che lo promovono. Io intrapresi queste osservazioni verso la metà di Settembre del 1780 in occasione di un piccol viaggio che feci in Toscana; e vado ad esporle e sottometterle al giudizio del pubblico: esse sono in piccol numero, ma altrettanto, a mio credere, decisive.

Poco ho a dire dell' ispezione del locale, e delle prime apparenze del fenomeno. *Pietra-mala* è un piccol villaggio, che si truova alla più grande altezza della strada che mette da Bologna a Firenze. Alla distanza di poco più d' un mezzo miglio al disotto del villaggio sul pendio del monte evvi un terreno, come un picciol campo, il quale mirato anche da lungi vedesi coperto da fiamme, che sorgono all' altezza d' alcuni piedi, fiamme leggere, ondeggianti, e di color ceruleo la notte, come s' accordano tutti a riferire gli abitanti di quelle vicinanze: in tempo di chiaro giorno queste fiamme non si scorgono che assai dappresso, e appajono assai tenui e rossigne. Nel che può ravvisarsi di già una perfetta somiglianza colla fiamma della mia aria infiammabile nativa delle paludi. Quando io mi trasferj sul luogo il giorno era così chia-

ro, e il terreno illuminato dal Sole, che punto quasi non si vedeano le fiamme: il calore quello era piuttosto che ne avvertiva all' accostarvisi che un faceva. Io mi trovava insieme a due miei compagni di viaggio (*a*) e un paesano per guida, il quale rimarcar ci faceva ognuna di tali vampe, mediante il gettare qua e là ne' luoghi particolarmente infiammati, che sono come altrettanti focolari distinti un dall' altro, de' fascetti di paglia, che vi prendean fuoco all' istante. Del rimanente essendo noi molto curiosi, e non lasciando di tentare e frugare per ogni dove, non andò guari che tutti avemmo fissati questi falò, o getti di fiamme distinti, quali più e quali men grandi, che non erano poi assolutamente invisibili; perocchè se in qualche sito ci avvenne di abbruciar prima un poco le scarpe che ci accorgessimo della fiamma ivi esistente, questa in appresso, ponendovi occhio più attento, non ci sfuggiva. Cotali fiamme sono qua e là sparse e disseminate per l' estensione di poche tese d' un terreno che resta scoperto, piuttosto leggero ed arido, e un po' sassoso; ed occupano segnatamente i luoghi, dove questo si trova visibilmente più raro e secco. Talvolta cambian di luogo, ma più sovente di volume, quando in larghezza, e quando in altezza; qui guadagnan terreno, e si riuniscono più fiamme insieme, là si ritirano e si disgiungono: si può anzi sopprimerne alcune, ed ingrandirne altre a talento. Altro non vi vuole per fare sparire le più piccole, che un forte soffio; e per quelle che sono più larghe, basta versarvi tanto d' acqua, che ne ricopra tutta l' estensione; oppure accumular ivi della terra, e rincalzarla e comprimerla tanto, che più non dia facile passaggio all' aria infiammabile ch' è sotto. Quest' aria allora risospinta forte in maggior copia dagli altri pertugi vicini, ond' è che da questi come focolari si levan le fiamme più alto: insomma a misura che si sopprimon alcuni de' getti, crescono in forza gli altri. Io mi trattenni lungo tempo a ripetere e variare tali prove, prendendomi

(*a*) Il Sig. Marchese *Torelli* Patrizio Pavese Cavaliere di S. Stefano di Toscana, e il Sig. Ab. Don Giuseppe *Re* Assistente al gabinetto di Fisica della R. I. Università di Pavia.

ſoprattutto piacere di far ſalire le fiamme più alto a varie riprese, mediante il battere de' piedi, e l' aggravarmi ſul terreno attorno ad alcuno di tali getti; parendomi che queſto ſolo baſtar poteſſe a render ſenſibile l' eſiſtenza di quel ſerbatojo d' aria infiammabile, che quivi ho ſuppoſto; la qual aria ſe dalle interne cavità già ſi fa ſtrada da sè, e trapela ſpontaneamente per il terren poroſo, è ben naturale che ſgorghi aſſai più copioſamente ſopravvenendo quell' eſterna preſſione, che ajuta a ſpremernela fuore: non altrimenti che noi la ſpremiamo nelle noſtre ſperienze da una veſcica o da un otre riempiutone, giuſto per offrire lo ſpettacolo di ſimili getti di fiamma.

Non voglio laſciare di far oſſervare, per compiere in tutte le ſue parti il parallelo tra l' aria infiammabile e le fiamme di *Pietra-mala*, che ogni qual volta una di queſte fiamme, eſſendoſi per qualſivoglia maniera ſpenta del tutto, viene a riaccenderſi, ciò non fa mai ſenza quella ſpecie di eſploſione, che accompagna l' accendimento dell' aria noſtra infiammabile, e che è tutta propria di lei. Queſta circoſtanza, di cui ha fatto caſo il Barone *Dietrich*, avrebbe dovuto fin d' allora fargli ſovvenire dell' aria infiammabile. „ Le pioggie e „ le nevi, dic' egli, non impediſcono tali fiamme di brucia- „ re; ſolamente di gran colpi di vento ſono capaci di ſpe- „ gnerle; però per un momento. Se ſi coglie queſt' inſtante „ per accoſtarvi un corpo ardente, le fiamme ricompajono *con* „ *una ſpezie d' eſploſione*, e ſi comunicano a tutta la circonfe- „ renza, come ad una ſtriſcia di polvere „. (Op. cit. pag. 420.)

Si avrà forſe difficoltà a perſuaderſi, che eſiſta ſotto queſto terreno una provviſione d' aria infiammabile così grande, da poter ſomminiſtrare alimento perenne all' ardere di tante fiamme. Ma ſe vogliam ſupporre che ſi trovaſſe altre volte in quel luogo una gran palude, la quale ſia rimaſta in ſeguito di tempo ſepolta, per uno di quelli accidenti che è facile immaginarſi (*a*), ſarà anche facile intendere come le ſo-

(*a*) Favoriſce non poco queſta ſuppoſizione ciò che dice il Sig. *Ferber*. „ Il ſito, da cui le fiamme di *Pietra-* „ *mala* ſortono, è coperto di terra, e „ di pietre ſtaccate talcoſe, argilloſe, „ ſe, e marnoſe, come ſe vi foſſe ſucceduta una ſovverſione violenta „ Op. cit. pag. 421. e ſegg.

ſtanze vegetabili e animali continuando a decomporſi vi abbian colà entro laſciato il prodotto della lor aria infiammabile, la quale, ritenuta in quella ſotterranea prigione, da cui eſala ſol poco a poco trapelando dal terreno, non ſia per anco tutta conſumata: ſe ſi ſuppone, ciò che è ancora più veriſimile, che una quantità di materie putreſcenti venga continuamente condotta in quella vaſta cavità ſotterranea (che in ogni conto dobbiam ammettere che vi ſia) da alcuni ruſcelli d' acqua carichi di ſpoglie vegetabili ed animali, i quali vi ſcolino come in una fogna, niente più vi mancherà per la formazione di quel magazzino d' aria infiammabile, ampio, ineſauſto, di cui abbiam biſogno. Del reſto l' aria infiammabile potrebbe eziandio venir fornita da qualcuna di quelle mine, che ne abbondano, come ſon le mine di carbon foſſile. Ma io amo meglio di credere, che queſt' aria ſia della ſteſſa ſpecie che ho ſcoperto ne' fondi delle acque ſtagnanti e ſporche, per la ragione primieramente che coteſta è più comune, e ſi produce in molto maggior quantità dell' altre, e dappertutto; in ſecondo luogo perchè la maniera di ardere della noſtr' aria infiammabile paludoſa è ſimile in tutto a quella delle fiamme di *Pietra-mala*.

Se non che qual biſogno abbiamo di ricorrere a ſuppoſizioni per concepire la poſſibilità di queſta grande raccolta d' aria infiammabile ſotterra ne' contorni di *Pietra-mala*, quando l' eſiſtenza ſua ci viene provata, e reſa palpabile da una quantità prodigioſa di bolle di coteſt' aria che ſcappano attraverſo l' acqua di una fontana la qual ſi truova a picciola diſtanza dal terreno ardente (*a*)? Si può facilmente raccogliere di tal aria, che cagiona un grande ribollimento nell' acqua per molte gallozzole, che vengono a romperſi alla ſua ſuperficie, adattando un imbuto al collo d' una caraffa rivolta colla bocca nell' acqua, e piena ella ſteſſa di acqua; come ho inſegna-

(*a*) „ Rimontando un poco la mon„ tagna, e ſul medeſimo pendío ſi ve„ de un altro pezzo di terreno arden„ te più grande e più eſteſo che il pri„ mo. Più in ſu, all' eſtremità della „ valle vi ha un piccolo ſtagno, chia„ mato *Acqua buja*; le di cui acque, „ ancorchè fredde, ſembrano bollire co„ ſtantemente „ *Ferber* p. 123, il quale ſuppone anche qui del petrolio, e non ſoſpetta neppure l' aria infiammabile, che ſi vede e ſi tocca.

to per cavare l'aria infiammabile dei fossi (*a*): si può, dico, raccogliere dell' aria di quella fontana, trasportarla entro a bottiglie convenientemente turate, ed abbruciarla poi a bell' agio quando un vuole; e si può, se più piace, infiammarla sulla superficie medesima dell' acqua, (*b*) onde sgorga: ciò che ne fa una vera *fontana ardente*. Or poichè da questa fontana non corre che un picciolo tratto al terreno ardente, pare che non vi sia, nè esser vi possa alcun ragionevole dubbio intorno all' identità del fenomeno. Nulla di meno passiamo più innanzi, e cerchiamo delle prove più dirette e concludenti.

Ad oggetto di rendere sensibile il da me supposto sgorgo di aria infiammabile dal terreno in questione, m' avvisai di spargere delle pagliuzze ed altri corpi leggeri là dove la terra mi parea più leggera e sollevata, segnatamente in que' luoghi da cui aveva un momento prima a bella posta spazzata via con forte soffio la fiamma: con che ebbi la soddisfazione di vedere che coteste paglie ed altri minuzzoli venivano commossi, e fatti saltellare dal soffio d' aria (e da che altro mai ?) che trapelava dal terreno. Non mi restava più per compimento di prova, che di raccogliere di quest' aria medesima, e vedere se era veramente infiammabile, al par di quell' altra che scappa in forma di bolle dalla vicina fontana, di cui s' è parlato poc' anzi. A questo fine feci scavare delle fossatelle ne' luoghi precisamente occupati da fiamme, e ricolmare quelle d' acqua, con che veniva (com' è naturale) soffocata la fiamma; si videro, com' io l' avea predetto, salire dal fondo a galla dell' acqua copiose bolle d' aria; le quali per rendere più grosse e più frequenti, mi misi a frugare col bastone sott' acqua sommovendo la terra, intanto che per raccogliere di tal aria teneva rivolta colla bocca nell' acqua una bottiglia piena d' acqua con adattato al modo solito l' imbuto. Con simile artificio mi riuscì di trasportare una quantità sufficiente di cotest' aria al nostro albergo di

(*a*) Lett. sull' Aria infiam. ecc.

(*b*) E' dunque l' aria infiammabile a cui si dà fuoco, e che leva fiamma sulla superficie di quell' acqua, un' aria infiammabile che ognuno può raccogliere; non è il sognato petrolio, che nè si scorge, nè alcuno ha raccolto mai in quel sito.

Pietra-mala , dove feci la prova d' infiammarla in presenza di quelle stesse persone, che erano state meco sul luogo, che mi avevano ajutato a raccoglierla , e che avevano assistito alle altre sperienze. La fiamma di quest' aria si mostrò azzurra e lambente , tutt' affatto simile a quella dell' aria infiammabile delle paludi, e della fontana, di cui abbiamo parlato.

Non si può dunque a meno di riconoscere nel fenomeno di *Pietra-mala* un' aria infiammabile, che già bella e formata si contiene in un vasto ricettacolo sotterraneo, da cui esce continuamente, facendosi passaggio per alcune crepacce, e pertugi invisibili , ossia attraverso la terra medesima rara e porosa. Tutt' al più vi si potrebbe associare un' altra causa, e attribuire una parte solamente del fenomeno all' aria infiammabile, la di cui esistenza in quel luogo è ora dimostrata, e un' altra parte al supposto petrolio, o ad altra sorta di bitume; ma bisognerebbe bene essere innamorato morto di questo petrolio o bitume , per volerlo a tutti i patti tirar in campo , quando non è mai stato possibile di scoprirvelo , e che altronde non v' è bisogno alcuno di questo soccorso. No, lo ripeto, non v' è il minimo indizio di bitume , nè fluido nè concreto , sparso sopra il nostro terreno ardente : una terra arida , buona parte nericcia , mista a sassi piccioli e grandi , e pochi rimasugli di vegetabili sparsi sulla superficie, ecco tutto quello che vi si ritrova . Si è fatto caso da alcuni dell' odore di questa terra nericcia , che avean raccolto per esaminarla ; ma è facile riconoscere che non è altro che un odore empireumatico, che ha contratto essa terra arrostita dalla fiamma ivi esistente; come succederebbe d' ogni terra, che si sottoponesse alla medesima abbruciatura, salvo che fosse del tutto magra e sabbiosa. Nè maggior caso vuol farsi di quell' odore, che, al dir di taluno , dal luogo di quelle fiamme si spande intorno. Il Sig. *Dietrich* nel passo sopraccitato dopo aver detto che per prova ha trovato che quella terra *non è punto bituminosa* , soggiunge „ si dee presumere , che l' odor
„ grato ma leggero, che si sente quando si è sotto il vento
„ delle fiamme di *Pietra-mala*, che alcuni han preso per un
„ odore elettrico, ed altri per quello del belzuino, e che io
„ non ho potuto determinare sul luogo , non è altro che
„ quello dell' acido marino, la di cui presenza è provata dal-
„ la

„ la mia ſperienza „. Io crederei che foſſe l' odore ſteſſo dell' aria infiammabile, che quando abbrugia è leggere e non ingrato, alterato, ſe ſi vuole, dai vapori di detto acido marino, o d' altre ſoſtanze volatili che per avventura vi s' incontrino. Chechè ne ſia di tali circoſtanze puramente accidentali, quando le circoſtanze più eſſenziali che accompagnano il fenomeno dei terreni ardenti, i ſintomi principali di queſti fuochi convengono interamente con quel che ci offre l' aria infiammabile nativa, quando inſomma la raſſomiglianza è perſetta quanto mai può eſſere, coſtretti noi già a ravviſare nell' indentità degli effetti l' identità della cauſa, dobbiamo di queſta ſola eſſere contenti, ſenza andar a cercare altre cauſe concomitanti ſuperflue non che immaginarie.

Tra queſti ſintomi uno ve n' ha, ch' io non ho ancora indicato, tanto più rimarcabile, quantochè ſtando al mio ſuppoſto riceve una ſpiegazione tutta ſacile e naturale; e all' incontro non può averla che difficiliſſima e forzata in ogn' altra ſuppoſizione. Parlo delle vicende, a cui vanno ſottopoſte per le pioggie e la ſiccità le fiamme di *Pietra-mala*, e in generale quelle di tutti i terreni e ſontane ardenti. I pratici di que' luoghi ci aſſicurano, che queſte fiamme creſcono di molto colle pioggie. Or non ſi ſa comprendere in qual maniera le pioggie potrebbero aumentare il bitume o il petrolio alla ſuperficie di queſti terreni; meno poi come potrebber favorire la combuſtione, e l' alzata delle fiamme: pare anzi più naturale che doveſſero portarſi via tali materie, diluirle, e lavarne il terreno. All' incontro attenendoci alla noſtra ſpiegazione, ben ſi vede che queſte pioggie medeſime poſſono, anzi devono per via dello ſcolo delle lor acque nelle cavità ſotterranee, ove io pongo il ſerbatojo dell' aria infiammabile, aumentare l' emiſſione di coteſt' aria attraverſo gli ſcrepoli e la poroſità del terreno. Per conſeguenza quanto più copioſi ſaranno gli ſcoli d' acqua che penetrano là dentro, tanto maggior quantità di aria verrà coſtretta a dar luogo, e ſcappar ſuora per le dette ſtrade. Un' immagine noi abbiamo

di ciò nella mia *lucerna ad aria infiammabile* (*a*) ; perocchè a misura che si apre di più la chiave o robinet, per lasciar cadere un più grosso filo d' acqua dal recipiente superiore nell' inferiore pieno d' aria infiammabile, la fiamma, che esce del tubetto adattatovi, si fa più grande ed alta.

Terminerò questa Memoria con una breve descrizione d' un apparecchio, ch' io ho immaginato per reiterare simili sperienze a piacimento; poco parendomi l' esempio proposto della lucerna ad aria infiammabile, se non giungeva a rappresentare in altro modo, e con più perfetta imitazione le fiamme dei terreni ardenti. Ho dunque costrutta una grande cassa, che riempio d' aria infiammabile. Nella parte superiore, ossia coperchio, son praticati qua e là de' piccioli fori, e in qualche luogo sonovi dell' aperture più larghe con sopra fili di ferro incrocicchiati o ramatine adattate : il tutto però è ricoperto da grossa sabbia, pietruzze, festuche ecc. con a luogo a luogo dell' erba; per dargli così l' apparenza di un terreno naturale. Le cose in tal modo disposte, io verso dell' acqua con un innaffiatojo (per imitare così anche la pioggia) sopra un luogo di questo artificiale terreno, ove ho accomodato un canale che mette nell' interno del recipiente. Tosto che questo comincia a ricever acqua, l' aria infiammabile costretta a dar luogo scappa dai piccoli fori, e attraverso la sabbia e i mucchj di pietruzze onde son ricoperti : allora gettandovi un zolfino acceso, si alza una bella fiamma cerulea, che cresce o decresce a misura che la pioggia e i rivoletti che scorrono sono più abbondanti e portan più acqua

(*a*) E' stato stampato a Strasburgo un opuscoletto col titolo *Description & usage de quelques lampes à air inflammable* 1780, dove l' autore, che è il Professore *Ehrmann*, attribuisce l' invenzione al Sig. *Fürstenberger* di Basilea; quando il vero si è, che avendo io il primo immaginato e costrutto più d' una di tali lucerne, e ridottele a segno di servire *d' accendilume* fin dalla primavera del 1777, poco dopo cioè l' altra mia invenzione della *pistola ad aria infiammabile*, ne aveva mostrata l' idea nell' autunno seguente all' istesso Sig. *Fürstenberger* non solo, ma al Sig. *Barbier* di Strasburgo, e a diversi altri in occasione d' un viaggio che feci. Non parlo di que' molti, a cui già aveva mostrata tal macchina a Como e a Milano. Nel 1779 poi epoca anteriore ancora d' un anno alla pubblicazione dell' operetta del Sig. *Ehrmann*, ebbi occasione di mandare una di queste lucerne o accendi-lumi a Firenze per Mylord Principe di *Cowper*, a cui l' aveva già da un pezzo promessa.

nell' interno. Talvolta la fiamma si tien così bassa, che rimane nascosta tra i piccioli sassi, e negl' interstizj della sabbia, talmente che si terrebbe per estinta; ma questa fiamma che ci cova sotto è pronta a sorger alta e farsi vedere, tostochè si versi novella acqua e ne scorra pel canale nel ricettacolo in copia sufficiente. Non voglio lasciar di dire, che si possono ripetere sopra questo terreno ardente artificiale tutte le sperienze, che ho fatte sopra il terreno ardente naturale di *Pietra-mala*: si può sopprimere questa o quella fiamma, impedendo l' uscita all' aria infiammabile, o col bagnare e comprimere la terra in quel tal sito, o in altra maniera: si può, formandovi delle fossette e colmandole d' acqua, far nascere e il ribollimento di essa per le gallozzole di aria che vengono a galla, e gli altri fenomeni delle vere fontane ardenti ecc.

Ecco come sono riuscito a rappresentare le più comuni apparenze e gli accidenti delle fontane e dei terreni ardenti, seguendo le idee, che fin dapprincipio mi era formato dell' origine e natura di tai fuochi. Una sì perfetta rassomiglianza non dovrebbe lasciar luogo ad alcun dubbio, quand' anche non vi fossero tutte le prove dirette, che dimostrano l' esistenza dell' aria infiammabile stanziante sotto il terreno di *Pietra-mala*, e il continuo sgorgo ce ne fan vedere, e rendono per ogni maniera palpabile. E che si ricerca di più per una piena convinzione? Posso dunque dire di aver bene accertata l' origine di un fenomeno bello e singolare, e di aver assegnata giustamente una delle parti all' aria infiammabile nativa sulla superficie della terra. Chi sa che un giorno non si verifichino anche le altre idee ch' io ho avventurate nelle mie Lettere sull' aria infiammabile (*a*), riguardo all' influsso e giuoco che può avere tal aria al di sopra della terra nelle differenti regioni dell' atmosfera, concorrendo coll' elettricità alle meteore ignee? Queste idee non sarà inutile l' averle arrischiate, se serviranno almeno a portar più lungi le osservazioni e le sperienze.

(*a*) Lett. IV. e V.

SAGGIO

Di una nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e

NUOVO METODO

Per trovare colla sperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume.

Del Sig. TEODORO BONATI Matematico di Ferrara.

Saggio di una nuova teoria del movimento delle acque pei fiumi.

1. IL P. *Castelli* Cassinense fu quegli, che nel 1640 gettò il primo fondamento della Scienza de' fiumi con quel suo teorema, che qualora un fiume non cresce, nè cala, e che in conseguenza si trova in uno *stato di permanenza*, per ogni sua sezione passa una egual copia di acqua in un tempo stesso, qualunque siasi l' ineguaglianza di quelle sezioni. Stabilì indi, che le velocità dell' acqua nei fiumi fossero in ragione delle altezze dell' acqua sopra il fondo, ma col solo fondamento di alcune sue sperienze fatte in piccolo con canali artefatti; e si vede che intese di velocità medie, senza cercare se la velocità sia la medesima dalla superficie al fondo, oppure se cresca, o scemi, e con qual legge.

2. Domenico *Guglielmini* fece delle sperienze ora con un vaso parallelepipedo mantenuto sempre pieno di acqua mentre questa usciva per un foro fatto in una sponda del vaso, ed ora con canali artefatti. Le prime davano, che le velocità pel foro fossero in ragione sudduplicata delle altezze dell' acqua sopra il foro. Nelle seconde poi le velocità recedettero non poco sì dalla ragione semplice delle altezze, che dalla ragione sudduplicata delle altezze suddette, come si vede nella Prefazione al trattato *De mensura aquarum fluentium* stampato in Ginevra l' anno 1719. Trattandosi di determinare le velocità dell' acqua pei fiumi, parea veramente che le se-

conde, perchè fatte con canali, che sono più analoghi ai fiumi che un vaso parallelepipedo, fossero da preferirsi alle prime: eppure queste non le descrisse nemmeno, e trascurandole affatto si attenne alle prime; ed ecco in compendio il suo sistema.

3. La vasca *QZA* (*fig.* 1.) somministri incessantemente acqua al fiume del fondo inclinato *ODE*. Si prolunghi la linea di questo fino all' incontro della superficie dell' acqua della vasca, cioè fino al punto *A* da denominarsi *origine del fiume*, e tirata l' orizzontale *AB*, e la *BD* normale al fondo, sia *DC* l' altezza dell' acqua della sezione in *D*. L' Autore nel lib. 2. prop. 2., e seguenti stabilisce, che le velocità dell' acqua per quella sezione (prescindendo dalle resistenze) debbano essere le medesime, che avrebbe l' acqua uscendo liberamente per un' apertura eguale alla detta sezione, e fatta nella sponda *BD* di un vaso *BDA* mantenuto pieno di acqua sino in B, le quali velocità nei punti *D*, *G*, *C*, ecc. sarebbero eguali alle velocità di un grave caduto dalle altezze dell' acqua insistente, o sia come le radici quadrate delle altezze *DI*, *GL*, *CM*; e però esprimibili colle semiordinate corrispondenti *DE*, *GH*, *CF* di una parabola conica *BFE*; e ciò perchè egli si persuadeva, che ogni particella di acqua giunta a qualunque punto *G* della sezione *DC* debba avere la velocità di un corpo solido disceso liberamente sopra un piano liscio, ed inclinato dall' origine *A* del fiume fino in *G*, la quale velocità si trova appunto eguale a quella del medesimo corpo allorchè fosse piombato dall' altezza *LG*. Sopra questo fondamento travagliò tutto quel trattato pieno di proposizioni assai belle, e che reggendo il fondamento sarebbero estremamente utili.

4. Se l' acqua in *CD* colle velocità *CF*, *GH*, ecc. perdesse la sua gravità, allora sì che potrei concepire come l' acqua inferiore alla sezione *CD*, o sia l' acqua *CDK*, non fosse per fare veruna remora all' altra, che passar deve successivamente per *CD*, perchè supponendo inoltre l' acqua fluidissima, ed il fondo, e le sponde affatto liscie, vedrei come ogni particella *G*, ed ogni altra componente un filamento *GV* in virtù della propria inerzia potrebbe ritenere la velocità *GH*, ch' ebbe in *G*, e la stessa direzione *GV*, con che non potrebbe opporsi in veruna maniera alle altre particelle,

che succedono in *G* colla medesima velocità, e direzione. Ma subito ch' io considero, che l' acqua *CDK* è grave, tosto io vedo che gli strati superiori premono gl' inferiori, e che premendoli tendono a schiacciarli, ed inducono in essi un conato di spandersi a tutte le bande, ed in conseguenza anche all' indietro verso l' origine del fiume, tutto che si trovi in moto verso la foce; il qual conato all' indietro dell' acqua *CDK* dee fare una remora al movimento dell' acqua, che succede in *CD*, onde questa non potrà altrimenti muoversi per *CD* con quella stessa libertà, colla quale uscirebbe dall' apertura libera fatta nella sponda del vaso *BDA*, come richiederebbe il sistema dell' Autore.

5. Egli è poi certo, che questa teoria non ha avuto luogo nemmeno prossimamente nè nelle accennate sperienze del *Castelli*, le quali furono ripetute da Gio. Domenico *Cassini* in Roma, e con lo stesso evento; nè lo ha avuto in quelle del *Guglielmini* stesso, tutto che sì quelle, che queste sieno state fatte con canali artefatti, cioè retti, e col fondo, e colle sponde liscie, e nei quali perciò le resistenze, che possono nascere dalle scabrezze, ed ineguaglianze dell' alveo, devono esser montate a poco.

6. Meno poi si verifica la stessa teoria nei fiumi naturali, perchè questi attese le resistenze, che derivano dalle tortuosità, ed ineguaglianze degli alvei, sono ben lontani dall' avere la velocità richiesta dalla teoria del *Guglielmini*, cioè quella che compete alle discese delle loro acque, le quali perchè provenienti da origini ben alte dovrebbero avere delle velocità sorprendenti e tali, che nessun fiume sarebbe navigabile.

7. Nè sussiste punto l' applicazione, che fa di questa teoria il P. *Grandi* al caso delle resistenze. Sia *DF* (*fig.* 2.) la velocità attuale alla superficie *DK* di un fiume *DL* da trovarsi colla sperienza, e *DE* sia l' altezza competente alla velocità *DF*, ed *EFH* una parabola conica col vertice in *E*, ed *ACI* sia un' altra parabola dello stesso parametro, che la prima, e col vertice in un punto *A*, che sia a livello della vera origine del fiume nel senso del *Guglielmini* (3). Secondo il *Grandi* le velocità dalla superficie *D* fino al fondo *G* del fiume senza le resistenze sarebbero le semiordinate *DC*,

BM, GI, come disse il *Guglielmini*; ma attese le resistenze incontrate dall' acque nel loro cammino dall' origine vera sino alla sezione DG, saranno DF, BN, GH, come se l' acqua fosse partita da una origine della sola altezza DE, che dall' Autore si chiama altezza dell' *origine equivalente*.

8. Ma si osservi, che le resistenze maggiori, ed in conseguenza i maggiori scemamenti di velocità devono trovarsi presso il fondo, laddove giusta il *Grandi* lo scemamento maggiore di velocità caderebbe alla superficie, giacchè $CF > MN > IH$, come facilmente si comprende. E qui giova il notare, che lo stesso P. *Grandi* non fu già intieramente pago di questo suo sistema *essendomi passate* (egli dice nella Prefazione) *per la mente altre idee di nuove ipotesi, le quali mi si rappresentavano in aria di maggiore verosimiglianza*.

9. Dopo tutto ciò siami lecito, ch' io esponga brevemente ciò, che ho pensato più volte intorno al moto delle acque pei fiumi. CD sia il fondo inclinato di un tratto regolare di un canale (*fig. 3.*), ed AB sia la superficie dell' acqua, la quale sia più inclinata, che il fondo, cioè con esso convergente. S' intenda divisa l' altezza AC in tante parti eguali, per esempio AP, PT, TC, ed in altrettante parti eguali BR, RV, VD s' intenda divisa l' altezza BD. Supporrò, che le particelle A, P, T camminino per le linee AB, PR, TV, giacchè non vedo ragione, onde in un canale regolare debba accadere diversamente. Si consideri la particella E di un filamento PR dell' acqua. Se la verticale ES esprimerà il peso assoluto di essa, fatto il rettangolo ZG, sarà EG la forza, colla quale quella particella viene spinta dalla gravità nella direzione del suo movimento verso R. Lo stesso si dica di ogni altra eguale particella P, o G del filamento PR, ognuna delle quali vien sollecitata continuamente dalla gravità verso R con una forza eguale alla EG, ch' è in ragione del seno dell' angolo $ESG = SEZ = PEt$ d' inclinazione del filamento PR all' orizzonte.

10. Così ogni altra particella I di un filamento inferiore TV viene spinta lungo la linea TV da una forza IK derivata dal proprio peso assoluto IQ. Per essere però la linea TV meno inclinata all' orizzonte, che la PR, l' angolo $IQK < ESG$; onde se le due particelle saranno eguali, ed $IQ = ES$,

sarà $IK < EG$. Dunque per questa sola ragione nel qui supposto caso della superficie convergente col fondo la velocità dalla superficie andando verso il fondo dovrebb' essere sempre minore. Che se la superficie fosse parallela al fondo, anche tutti i filamenti *PR*, *TV* sarebbero paralleli fra di loro, e le forze *EG*, *IK* sarebbero eguali, e per questa sola ragione la velocità dalla superficie sino al fondo in questo secondo caso sarebbe eguale. E se la superficie *AB* divergesse dal fondo, anche i filamenti *PR*, *TV* sarebbero divergenti, e la *EG* sarebbe minore della *IK*, e per questa sola ragione in questo terzo caso le velocità dalla superficie sino al fondo sarebbero crescenti.

11. Codeste forze *EG*, *IK*, che così agitano le particelle *E*, *I*, derivate dal loro proprio peso, si possono dire forze intrinseche alle medesime particelle. Ma queste stesse particelle vengono inoltre agitate da altre forze ad esse estrinseche, cioè dalle pressioni delle altre particelle di acqua ad esse contigue, che le attorniano, e che le premono per tutti i versi. E siccome per esempio la particella *I* così premuta si muove nella direzione *IV*, è forza il dire che in qualunque altra direzione vi sia l' equilibrio fra le pressioni contrarie, che tendono a muovere la stessa particella *I*. Altrimenti se mancasse un tale equilibrio, per esempio nella direzione *IQ*, la particella *I* si muoverebbe in una direzione di mezzo fra la *IQ*, e la *IV*, e non nella supposta *IV*.

12. Basterà pertanto che si esaminino le pressioni di quelle particelle contigue, che possono aver parte nel maggiore, o minor movimento della particella *I* nella sola direzione *IV*. Si consideri perciò l' acqua *ATVB* come divisa in tante colonne verticali insistenti a ognuna delle particelle minime acquee componenti il filamento *TV*, delle quali alcune sieno *L*, *I*, *F*, le cui colonne insistenti sieno *LH*, *IO*, *FN*. Qualunque sieno le velocità dell' acqua da *O* fino in *I*, sarà sempre vero che le dette colonne premeranno continuamente al basso con tutto il loro peso, onde la particella *I* in virtù della gravitazione dell' acqua *OI* farà un conato a tutte le bande (come comunemente vien dimostrato), ed in conseguenza anche verso *L*, proporzionale all' altezza *IO*. Ma a questo conato verso *L* si oppone l' acqua *HLI*, la quale respinge la

stessa

ſteſſa particella *I* verſo *F* con un conato proporzionale all' altezza del punto *H* ſopra il punto *I*, onde queſto prevalerà al conato contrario della *I* verſo *L* col peſo della colonna acquea *Hz* determinata dalla orizzontale *Oz*, e ſarà queſta un' altra forza della *I* ad eſſa eſtrinſeca derivata dall' acqua, che le ſovraſta, e l'attornia, la qual forza, o peſo della colonna *Hz* la agita verſo *V* unitamente alla forza *IK* derivata dalla gravità. Lo ſteſſo vale per ogni altra particella del filamento *TV*, come per la *F*, che viene agitata verſo *V* da una forza intrinſeca derivata dalla gravità, ed inoltre da una forza eſtrinſeca eguale al peſo della colonna acquea *Oy* determinata dalla orizzontale *Ny*.

13. Si vede, che codeſte forze eſtrinſeche proporzionali alle *Hz*, *Oy*, ecc. ſono in ragione del ſeno d' inclinazione della ſuperficie *AB* all'orizzonte, qualunque ſiaſi la profondità della particella *I* ſotto la ſuperficie, e qualunque ſiaſi la direzione *IV* del moto della *I* verſo *V*, e perciò anche quando una tal direzione invece di eſſere declive, come moſtra la figura, foſſe orizzontale, od anche acclive, come accade preſſo i fondi inferiori, ed acclivi dei gorghi, che s' incontrano nei fiumi, e preſſo il fondo di quei fiumi, che verſo i loro sbocchi in mare hanno il fondo acclive, come il Po grande, od anche preſſo il fondo acclive dei fiumi al loro accoſtarſi al ciglio di una qualche cateratta.

14. Quindi è, che per la ſola forza eſtrinſeca ora ritrovata di ogni particella *I* le velocità di queſte dovrebbero eſſere eſattamente eguali tanto alla ſuperficie, che ſotto la ſuperficie, e ſino al fondo.

15. Queſte due forze, una intrinſeca, che deriva dal proprio peſo di ogni particella, e l' altra eſtrinſeca, che deriva dalla preſſione dell' acqua inſiſtente all'acqua, e neſſun' altra, ſono le forze, che tendono ad accelerare l' acqua lungo il fiume continuamente, coſicchè ſe la loro azione non veniſſe diſturbata noi vedremmo i fiumi ſempre più veloci quanto più ci accoſtiamo allo sbocco. Ma queſto realmente non accade, giacchè allontanandoci dalla origine, ed arrivati per eſempio alla pianura, dove il fondo è tuttora declive, benchè meno, oſſerviamo la velocità ſcemata di molto, e talvolta la vediamo ſcemata anche vie più prima di arrivare allo sbocco.

16. Queſt' effetto deriva dalle reſiſtenze, che fanno all' acqua prima le tortuoſità del fiume, e poi le ſcabrezze del fondo, e delle ſponde, le quali ſcabrezze non ſi può negare che ritardino l' acqua ſenſibilmente anche in diſtanza dal fondo, e dalle ſponde, benchè il ritardo ſia ſempre minore a miſura che ci ſcoſtiamo da quello venendo alla ſuperficie, e da queſte accoſtandoci al filone. E ſiccome le reſiſtenze, che derivano dalle ſcabrezze, giuſta le ſperienze fatte, creſcono in ragione duplicata delle velocità, facilmente accade che continuando le medeſime ſcabrezze, e creſcendo la velocità per la continua azione delle accennate forze motrici, creſcono altresì le reſiſtenze, ed in maniera che preſto arrivano a pareggiare le forze motrici, con che l' acqua preſto giugne ad una velocità *terminale* conveniente alle condizioni particolari di un dato tratto di fiume. Che ſe andando più oltre nello ſteſſo fiume le ſcabrezze creſcano, la velocità diminuirà, e con eſſa caleranno anche le reſiſtenze, finchè queſte ſi equilibrino di nuovo con le forze motrici, e ſi abbia così un' altra velocità terminale conveniente alle circoſtanze di quell' altro tratto di fiume. Se ſcemaſſe, o creſceſſe la pendenza del fondo, e della ſuperficie, le forze motrici diverranno diverſe, e varia a proporzione riuſcirà la velocità terminale.

17. L' unico caſo da me contemplato, in cui la velocità ſotto la ſuperficie potrebbe eſſer maggiore, che alla ſuperficie, è quando la ſuperficie ſia divergente dal fondo (10). Ma queſto nei tratti regolari di un fiume non s' incontra, mentre anzi generalmente la ſuperficie piuttoſto converge col fondo, benchè di tanto poco, particolarmente a qualche diſtanza notabile dallo sbocco, che in certo modo ſi può conſiderarla come parallela al fondo. Ed in queſto caſo le forze riſpettive *EG*, *IK* rieſcono eguali, e per le coſe dette ai n. 10, 14, ſe non vi foſſero le reſiſtenze, la velocità dalla ſuperficie al fondo ſarebbe eſattamente la medeſima. E perchè nel filone la maggiore reſiſtenza deriva dal fondo, giacchè l' acqua colà è più vicina al fondo, che alle ſponde, la velocità nel filone ſarà minore preſſo il fondo, e poi creſcerà venendo verſo la ſuperficie prima più, e poi meno fino alla ſuperficie, coſicchè la velocità maſſima ſarà alla ſuperficie, e la ſcala delle velocità ſarà una qualche curva, come la *ABC*

(*fig.* 4.) dell' asse *DE*, essendo *DA* alla superficie, ed *EC* al fondo.

18. Colla teoria finqui esposta si comprende come un fiume, il quale abbia la superficie più inclinata che un altro, in parità di circostanze dovrà essere più veloce dell' altro, perchè abbiamo veduto, che una delle forze motrici è in ragione del seno d' inclinazione della superficie (13). Nel mio sperimento XVIII contro *Genneté* a un canale artefatto del fondo *AH* (*fig.* 5.) con acqua corrente da *A* verso *H* applicai una chiusa *MF*, e l' acqua dispose la superficie come la *IFN*, e la velocità in *B* era maggiore che in *C*, ed in *D*. In *E* poi il moto era notabilmente accresciuto, e più di tutto in *F*. In *G* il moto bene spesso era vorticoso. Dimandai l' anno 1767 qual fosse la forza, che muove l' acqua in *D*, e che fa crescere la velocità in *E*. Ora dirò, che la forza movente l' acqua in *D*, ed in *E* è l' accennata al n. 12, e trovata al n. 13 in ragione del seno d' inclinazione della superficie dell' acqua sopra *D*, e sopra *E*, e che la velocità in *E* è maggiore appunto perchè ivi l' inclinazione della superficie si fa maggiore.

19. Crescendo in un fiume l'altezza dell'acqua, ancorchè non crescesse l' inclinazione della superficie, crescerebbe la velocità, perchè l' acqua componente quell' altezza di più come più lontana dal fondo sentirà meno le resistenze di questo, e potrà ubbidire più alle sue forze motrici, che l'altra, che componeva la sola altezza di prima, e si muoverà più, e metterà anche più in moto l' acqua sottoposta. Maggiormente poi crescerà la velocità se, crescendo l' altezza, cresca ancora l' inclinazione della superficie.

20. Crescendo la larghezza senza che scemi l' altezza e l' inclinazione di superficie, le parti di mezzo del fiume saranno più lontane dalle sponde, le cui scabrezze faranno perciò un minor ritardo al filone, onde questo si muoverà più, e metterà più in moto il rimanente.

21. Egli è questo il saggio di teoria del movimento delle acque pei fiumi, ch' io mi era prefisso di esporre. Ora verrò esaminando quanto questa teoria si concilj colla sperienza. Il metodo più insinuato dagli Autori, ed il più applaudito per iscoprire colla sperienza il moto dell' acqua anche

ſotto la ſuperficie, è ſtato quello di un pendolo, o ſia di una palla *B* (*fig.* 6.) attaccata con un filo a un punto fiſſo *A* da immergerſi ſotto la ſuperficie *DE* dell' acqua di un fiume corrente da *D* verſo *E*, la quale perciò terrà la palla col filo lungi dalla verticale *AD* più, e meno ſecondo la diverſa velocità dell' acqua, ed il diverſo peſo ſpecifico della palla, pretendendoſi di poter ricavare così la velocità dell' acqua nel ſito della palla colla ſola oſſervazione dell' angolo di deviazione della parte del filo fuori dell' acqua.

22. Di queſta fatta di ſperimenti propoſti dal *Guglielmini*, dal P. *Grandi*, dall' *Ermano*, ed ultimamente dal chiariſſimo P. Ab. *Cametti* nella ſua *Mechanica fluidorum* l' anno 1777 ne vedo fatti non pochi dal *Zendrini*, dai Matematici di una Viſita al Po grande l' anno 1729, dal P. *Lecchi*, e dal Sig. *Michelotti*; i quali generalmente hanno trovato, che alle immerſioni più profonde della palla ha corriſpoſto un maggior angolo di deviazione del filo dalla verticale, e generalmente hanno convenuto, che le velocità dell' acqua nel ſito della palla foſſero in ragion duplicata delle tangenti dei detti angoli, d' onde ne verrebbe, che a maggiori profondità ſotto la ſuperficie corriſpondano velocità ſempre maggiori, affatto contro la mia teoria (17).

23. Due inavvertenze a mio giudicio ſi ſono commeſſe in queſto genere di ſperimenti dai loro Autori. L' una è, che quando la palla è immerſa a qualche profondità, l' angolo di deviazione del pendolo non deriva ſolamente dall' azione dell' acqua contro la palla, come eſſi hanno creduto, ma deriva ancora dall' azione dell' acqua contro quella porzione di filo, che ſi trova immerſa, ed eſpoſta all' acqua. Per la qual coſa quand' anche la velocità dell' acqua ſotto la ſuperficie, e fino al ſito della palla, ſi manteneſſe la medeſima che in ſuperficie, l' angolo di deviazione del filo, che ſi oſſerva fuori dell' acqua, dovrebbe neceſſariamente eſſer maggiore, che quando la palla foſſe appena ſotto la ſuperficie; e profondando la palla di più, il detto angolo creſcerebbe di più, perchè l' acqua agirebbe contro una porzione maggiore di filo.

24. L' altra circoſtanza non avvertita è, che il filo eſſendo pieghevole dee diſporſi ſott' acqua in una curva *EOF*, che vien detta *filare*, e per determinare la quale converrebbe

che fosse nota la scala delle velocità dell' acqua, ch'è appunto quella che si cerca.

25. Da quest' ultima considerazione si fanno palesi altri due inganni de' soprannominati Autori: L'uno è, che hanno giudicato la palla nel punto *G* della retta *AE* prolungata, ed in conseguenza alla profondità *IG*, che è minore della vera profondità *HF*. L'altro poi più interessante è, che hanno dedotto la velocità dell' acqua nel sito da essi supposto della palla dalla grandezza dell' angolo *DAE* di deviazione del filo non sommerso, quando veramente non potrebbe desumersi che dall' angolo *cam*, che fa colla verticale *am* il diametro *ac* della palla, che parte dal punto *a* di sospensione della palla dal filo; il qual angolo ognun vede ch' è sempre minore dell' angolo *DAE* (per essere $cam = iFn$, e $DAE = EnH > iFn$); e sarà eguale all' angolo *DAB* nel caso, che la velocità in *F* sia eguale alla velocità in *B*; e sarà anzi minore dell' angolo *DAB* nel caso, che la velocità in *F* fosse minore che in *B*.

26. Per tutte queste ragioni i suddetti Autori hanno errato, e l' errore dev' essere stato maggiore secondo che la palla è stata di un peso specifico minore, e secondo che il filo è stato più grosso, e più sott' acqua. La grossezza del filo ci vien taciuta da tutti; ma egli è certo, che quei fili hanno retto al peso della palla, ed all' impressione dell' acqua contro la palla, dal che si può concludere, che la loro grossezza non sia stata indifferente, e trascurabile, come me lo ha poi mostrato lo sperimento, che vengo a descrivere.

27. In un canale largo piedi 15 circa (parlerò a misura di Parigi), e profondo sei piedi, con un galleggiante trovai l' anno 1769, che la velocità dell' acqua in superficie era di piedi 2. 4 per ogni minuto secondo. Nel fondo *GT* (*fig.* 7) del medesimo canale presso un ponte di legno, che non angustiava punto il corso dell' acqua, conficcai verticalmente una tavola *PB* di tale lunghezza, che superava la superficie *CD* dell' acqua, avendo fatto che la faccia *AB* fosse parallela alle sponde, o sia a seconda del corso dell' acqua diretto da *C* verso *D*. Ben fermata la tavola con una mano in *O*, io immergeva a poco a poco l' asta *OE* facendo strisciare un risalto *F* dell' asta lungo la costa *Pn* della tavola, intor-

no al quale risalto *F* l' asta potea aggirarsi accostandosi alla tavola ora con l' estremità *E*, allorchè l' acqua investiva con maggior forza la parte *FE* che l' altra *FC*, ed ora con l' estremo *O*, se l' acqua spingeva con più di forza la parte *FC* che l' altra *FE*.

28. Lo scopo mio era di trovare quella immersione, in cui la forza dell' acqua contro *FE* si equilibrava con l' altra contro *FC*. Arrivato al punto di tale equilibrio io me ne accorgeva facilmente, perchè allora colla mano io sentiva, che l' estremo *O* nè mi veniva spinto dall' acqua verso la tavola, nè mi veniva allontanato dalla medesima.

29. In uno di questi sperimenti la parte *FE* era di un piede, e tentando trovai il detto equilibrio quando *FC* fu di 11 pollici; il che mostra, che quell' acqua fino alla profondità di quasi due piedi sotto la superficie correva con una velocità minore, che in superficie, però di poco. Nel secondo sperimento io avea mutato luogo al risalto *F* dell' asta in maniera, che *FE* era di due piedi, e tentando di nuovo trovai il descritto equilibrio quando *FC* fu di un piede e mezzo: il che mostra, che alla profondità di tre piedi e mezzo, o sia di piedi 2. 6 sopra il fondo, la velocità era sensibilmente minore che in superficie.

30. Nel medesimo sito feci uso di un pendolo. La palla era del diametro di due pollici, ed immersa nell' acqua perdeva la metà del suo peso. Il diametro del filo era due terzi di linea, e lo stesso filo era attaccato a un punto fisso *A* (*fig.* 8) sopra l' acqua *BD* piedi 2. 11. Nella prima immersione il filo *AC* era di piedi 3. 6, e l' angolo *BAC* fu tale, che l' orizzontale *BF* riuscì di pollici 18 prossimamente, cosicchè la palla rimaneva sotto la superficie dell' acqua corrente alquanto meno di due pollici e mezzo.

31. Avendo dato al filo una lunghezza maggiore *AE* di piedi 6. 11, ebbi l' angolo *BAD*, essendo *BD* di pollici 32, e *DE* di piedi 2. 8. 4.

32. Le linee rette eguali *CG*, *EL* verticali esprimano il peso della palla nell' acqua, il qual peso in *C* equivalerà a due forze *CK*, *CH*, ed in *E* a due altre forze *EN*, *EM*. Ma le due forze *CH*, *EM* devono equilibrarsi colle forze contrarie dell' acqua, le quali sono come i quadrati delle ve-

locità in C, ed in E. Dunque ſecondo i ſoprannominati Autori i quadrati delle velocità in C, ed in E avrebbero dovuto eſſere $:: CH : EM :: GK : LN :: BF : BD$, ed in conſeguenza la velocità in C alla velocità in $E :: \sqrt{BF} : \sqrt{BD} :: \sqrt{18} : \sqrt{32}$ (vegg. n. 30. 35.) $:: \sqrt{(9.2)} : \sqrt{(16.2)} :: 3 : 4$, cioè ſecondo eſſi la velocità in E dovrebb' eſſere ſtata ſenſibilmente maggiore, che in C; dovechè ſecondo le ſperienze precedenti la velocità in E era ſicuramente minore, che in C (29, 30).

33. Dopo tutto ciò parmi di poter concludere, che l' uſo di tai pendoli non è punto al caſo per iſcoprire le vere velocità dell' acqua a qualche profondità notabile ſotto la ſuperficie, e che dalle ſperienze fatte con eſſi non ſi può tirare veruna conſeguenza nè favorevole, nè contraria a una qualche teoria.

34. Lo ſteſſo affatto convien dire di altri ſperimenti fatti in Po con una certa *Fiaſca* riferiti dal P. *Grandi* alla fine del ſuo primo libro, e da Euſtachio *Manfredi* nelle Annotazioni al trattato della natura de' fiumi del *Guglielmini*. La detta Fiaſca, che dal P. *Grandi* ſi dice *Idrometrica*, era ſtata propoſta dal *Nadi* del 1721 in occaſione di una Viſita al Po. Era queſta un vaſo A (*fig.* 9) di latta più lungo che largo, con un ſottil foro in E aperto verſo la ſommità della parte più ſtretta, e con un tubo anneſſo BG, per cui paſſava un filo attaccato a una ſuſta, coſicchè tirando il filo in G il foro E reſtava aperto, e rallentando il filo quel foro reſtava chiuſo. Immerſa la Fiaſca a varie profondità ſotto la ſuperficie MN, e tenuto il foro E aperto per un dato tempo, e rivolto contro la corrente, l'acqua entrava per E mentre l'aria contenuta nella Fiaſca poteva uſcire pel tubo BG. Le quantità di acqua, che in tempi eguali entrarono per E nella Fiaſca tenuta a diverſe profondità, furono ſempre in ragione ſuddupIicata delle altezze dell' acqua del fiume ſopra il foro E; dal che ſi volea arguire, che tale foſſe la ragione delle velocità dell' acqua del Po a quelle diverſe profondità. Ma ſiccome lo ſteſſo avvenne quando le ſperienze furono ripetute in un' acqua ſtagnante, ſi dovette concludere che il metodo era inutile.

35. Altre ſperienze ſono ſtate fatte col *Tubo ricurvo del Pitot*. Adoperò queſt' Autore un tubo di vetro AEF ricur-

vo in E (*fig.* 10) afficurato nell' acqua corrente con certa macchinetta da eſſo deſcritta nelle Memorie dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi all' anno 1732. Immerſe il tubo a diverſe profondità *CE* ſotto la ſuperficie *CD* della Senna, e tenendo la bocca *F* diretta contro il corſo dell' acqua, notò le altezze *CB*, cui ſaliva l' acqua dentro il tubo ſopra il livello dell' acqua eſteriore *CD*. La velocità, che può acquiſtare un grave cadendo liberamente dall' altezza *BC* trovata in ciaſcuna immerſione, era ſecondo l' Autore la velocità dell' acqua in *F*. Il *Zendrini* (*Leggi* ecc. *delle acque correnti* pag. 134) ſoſpetta, che l' altezza *BC* non ſia proporzionale alla forza dell' acqua in *F*, e che parte di queſta forza s' impieghi in penetrare attraverſo il cilindretto acqueo *EC* ſtagnante nel tubo; ed il Sig. Franceſco Domenico *Michelotti* (*Sperimenti Idraulici* vol. I. pag. 148) credette, che la forza della corrente in *F* doveſſe miſurarſi non dalla ſola altezza *CB*, ma da tutta l' altezza *EB*, coſicchè le velocità in *F* ſarebbero come le radici quadrate delle altezze *EB* per eſſere le forze come i quadrati delle velocità. Io per accertarmi del vero col fatto mi ſon ſervito di un tubo *AEF* di latta, dentro il quale avea inſerito una bacchetta ſottile, e leggera *GB*, lunga come *AE*, che galleggiava ſopra l' acqua mediante un pezzo di ſughero applicato all' eſtremo *B* di modo, che la porzione *AG* eſterna della bacchetta mi dinotava l' altezza del cilindro acqueo *EB* dentro il tubo; ed in varie immerſioni più, e meno profonde la porzione *CB* fu proſſimamente la medeſima tuttochè variaſſero le altezze *BE*. E ſiccome queſto mi accadde in quel medeſimo luogo, dove io mi era accertato colle ſperienze del n. 29, che l' acqua correva preſſochè colla medeſima velocità in ſuperficie, e ſotto la ſuperficie fino alla profondità del mio tubo, mi ſono con ciò aſſicurato che non abbia luogo la difficultà del *Zendrini*, e del Sig. *Michelotti*.

36. Di più il Sig. *Michelotti* dopo un qualche carteggio con me replicò le ſue ſperienze, e nel ſuo ſecondo Volume ſtampato in Torino l' anno 1771 dice di aver immerſo un tubo ricurvo di latta ſimile al mio colla bocca inferiore rivolta ſecondo la direzione del corſo dell' acqua, e di aver oſſervato, che allora nel tubo l' acqua ſi componeva al livello della

della esteriore, e che rivolta la stessa bocca contro la corrente l' acqua interna si elevò nel tubo sopra l' esterna; e spiega il fenomeno con dire, che nel primo caso la sola pressione dell' acqua esteriore facea salire l' acqua nel tubo, e che nel secondo caso alla semplice pressione si aggiunse una forza prodotta dal movimento dell' acqua corrente; e perciò conviene, che in tai casi la celerità dell' acqua si possa argomentare dal maggior alzamento dell' acqua dentro il tubo sopra l' acqua al di fuori del tubo alla maniera del *Pitot*.

37. Ma in diverse immersioni fatte dal *Pitot* del suo tubo sotto il ponte reale della Senna, delle quali la massima fu a tre piedi sotto la superficie, l' acqua dentro il tubo si alzò sempre egualmente sopra l' acqua esterna. Dunque colà per le cose dette fino a tre piedi sotto la superficie la velocità fu sensibilmente la medesima.

38. Il chiarissimo Sig. Ab. *Ximenes* negli anni 1778, 1779 adoperò la seguente macchina. *AB* (*fig.* 11) è un albero verticale, che potea muoversi liberamente intorno ai perni *A*, e *B*. Alla rotella *C* era avvolto un filo, che passava sopra una puleggia *D*, e che portava un peso *E*. A qualunque profondità *MN* sotto la superficie *GH* dell' acqua potea fermare all' albero *AB* una ventola *F* con due braccioli *a*, *c*; ed il peso *E* dovea essere tale, che tenesse la ventola pressochè ferma normalmente contro il corso dell' acqua. Dalle misure della ventola, dei suoi braccioli, della rotella, e del peso *E* di ciascuna sperienza deduce l' altezza di quel prisma di acqua, che premeva la ventola, la quale altezza è quella, che conviene a un corpo cadente per acquistare la velocità dell' acqua nel sito della ventola. Da una serie di sperienze dedusse, che dalla superficie fino a un certo punto verso il fondo l' acqua si manteneva egualmente veloce; e che da quel punto fino al fondo la velocità diveniva sensibilmente sempre minore.

39. Finalmente dirò di uno sperimento, che per quanto io sappia è stato il primo ad essere tentato per investigare in qualche maniera nei fiumi il rapporto della velocità dell' acqua sotto la superficie a quella della superficie: ed è quello del P. *Cabeo* Ferrarese con un' asta *AB* (*fig.* 12) di legno con un corpo in *B* di un peso specificamente maggiore di

quello dell' acqua, e con alcune vessiche in *C*, buttata nell' acqua di un fiume colla superficie *MN*, e corrente da *M* verso *N*. Ecco che ne dice l' Autore nel suo libro primo delle Meteore stampato in Roma l' anno 1686 al testo 60: *Si enim poneres hastam in aqua stagnanti, pars eminens* AC *esset perpendicularis ad superficiem aquæ; similiter si moveatur tota æquali velocitate, servaret semper eamdem positionem. At videbis partem eminentem hastæ supra superficiem aquæ inclinari ad partem anteriorem, quod est evidens argumentum superiorem partem aquæ velocius fluere.*

40. Fin qui ho parlato degli sperimenti fatti da altri, non avendone inserito dei miei, che per incidenza, e parmi di aver mostrato, come di essi alcuni non sono punto atti a dinotar bene le velocità sotto la superficie, come sono tutti gli sperimenti fatti con Pendoli, e gli sperimenti fatti colla Fiasca Idrometrica del *Nadi*; e che tutti gli altri mostrano chiaramente, che nei siti degli sperimenti le velocità sotto la superficie o sono state eguali alla velocità della superficie, o ne sono state minori, come richiede generalmente la mia teoria. Ora in conferma di questo soggiungerò alcuni altri sperimenti miei.

41. Di due sperimenti fatti da me in Roma l' anno 1763 non farò parola, perchè fatti in piccolo, e perchè si possono vedere in due Raccolte una stampata in Parma, e l' altra in Firenze, e sono i due primi dell' *Aggiunta di Sperimenti* contro *Genneté*; onde passerò ad altri, de' quali il primo sia il da me replicato più volte trovandomi in qualche barca. Ho fatto, che questa si muova a seconda del corso dell' acqua, e colla velocità dei galleggianti vicini. Esprima *AC* (*fig.* 13) la superficie di quell' acqua corrente da *A* verso *C*. *DE* era un' asta di legno lunga sei, otto, dieci piedi (talvolta era un remo), ch' io immergeva nell' acqua verticalmente, cosicchè restava fuori dell' acqua con una porzione *BD*, e per tenerla in tal positura io non impiegava altra forza che quella di premere colla mano in *D* in giù quanto bastava per impedire, che l' asta, perchè di un minor peso specifico dell' acqua, non venisse spinta all' insù dall' acqua medesima. E quando il corso della barca diveniva per esempio alquanto maggiore di quello dei galleggianti, l' asta si

piegava con forza girando l'estremo *E* verso *A*; succedendo il contrario qualora la barca diveniva, anche per poco, più lenta dei galleggianti vicini. Dal che si vede manifestamente, che quando la barca andava del pari coi galleggianti, e che l'estremo *E* non mi veniva portato nè verso *A*, nè verso *C*, si vede, dissi, che l'acqua sotto la superficie non correva sensibilmente più, che in superficie, perchè se avesse corso più sotto la superficie, mi avrebbe portato l'estremo *E* verso *C*.

42. Altre volte essendo pure in barca ho immerso nell'acqua dei mattoni appesi ognuno ad uno spago, che venivano tenuti da me, e da altri colla mano sporta fuori della barca. Gli spaghi erano di diverse lunghezze, e quando mi trovava colla barca in siti regolari del fiume, e che la barca andava del pari coi galleggianti vicini, le porzioni di spago fuori dell'acqua erano sensibilmente verticali, a riserva dei più lunghi (i cui mattoni attaccati si accostavano al fondo del fiume), de' quali le porzioni fuori dell'acqua si vedevano sensibilmente inclinate all'avanti, dinotando così, che presso il fondo la velocità diveniva minore.

43. Nel sito descritto al n. 27, e dove mi era assicurato, che l'acqua alla profondità di due piedi e mezzo circa correva con una velocità minore, ma di poco, che in superficie, buttai una canna *DE* avente in *E* un mattone di tal peso, che dopo pochi bilanciamenti restò immersa con una porzione *BE* lunga non più di tre piedi, essendo trasportata dall'acqua con una positura sensibilmente verticale, a riserva di alcuni pochi tratti, nei quali camminò inclinata all'avanti ma di poco. Altre volte, e non poche, ho ripetuto questo sperimento nel Po grande servendomi colà non di canne, ma di aste di legno ora con mattoni, ed ora con piombo in *E* di tal peso, che l'asta rimaneva sopra l'acqua con una lunghezza di un piede, o due, essendo il Po ora con acqua mediocre, ed ora in piena, ed essendo la porzione *BE* talvolta di 10, talvolta di 15, ed una volta di 20 piedi; ed in questi casi vidi tali aste qualche volta sensibilmente verticali, ma per lo più inclinate all'avanti, benchè di poco, a riserva delle volte, ch'io mi sono incontrato dove l'acqua avea dei moti irregolari, nei quali qualche volta l'asta è stata

inclinata all' indietro, ed una volta avendo due aste una più lunga dell' altra, una di queste era inclinata a una parte, e l' altra a un' altra nel medesimo tempo, indizio di un movimento vorticoso.

44. Ecco pertanto un' altra mano di sperimenti, dai quali ho appreso, che nei siti regolari dei fiumi le velocità dalla superficie al fondo o sono sensibilmente le medesime fino a un certo punto poco distante dal fondo, come dice di aver osservato il Sig. Ab. *Ximenes*, o (il che mi sembra più naturale) decrescono, ma da principio assai poco, facendosi poi gradatamente vie maggiore il decrescimento a misura che si va più verso il fondo, e con quella legge, che non è per anche nota. Per la qual cosa parmi di dire a ragione, che la teoria da me esposta concorda assai bene colla sperienza; desiderando io per altro, che altri ancora si occupino in esperimenti di questa natura; perchè instituite con metodo più serie di consimili sperienze in fiumi diversi, ed in istati diversi, potrebb' essere, che si arrivasse un dì ad avere una legge delle velocità delle acque correnti pei fiumi sufficientemente prossima al vero, colla quale date le misure, e le condizioni di un fiume si possa senz' altro dire qual sia la sua portata, punto molto interessante pel regolamento dei fiumi. Ma finchè ci mancano codeste serie di sperimenti come trovare la portata di un fiume? Sarà questo il soggetto dell' Articolo, che segue.

Nuovo metodo per trovare colla sperienza la quantità dell' acqua corrente per un fiume.

45. Per misurare l' acqua corrente per un piccolo canale largo per esempio tre palmi, ed alto uno, se il canale era irregolare, il P. *Castelli* (prop. 1. l. 2.) applicava ad esso un Regolatore, o sia un letto orizzontale di legno, e due sponde verticali di legno; ed inferiormente al Regolatore intestava il canale, e ad una sua ripa presso il Regolatore applicava tanti sifoni, che assorbissero tutta l' acqua sopravveniente di modo, che il canale per l' applicazione di essi non crescesse, nè calasse. E trovata colla sperienza quant' acqua scaricava in un dato tempo ciascun sifone sapeva dire la *portata* del

canale; o ſia quant' acqua paſſava per una ſezione regolare di eſſo (qual era quella del Regolatore) anche non eſſendovi l' inteſtatura. Trattandoſi in ſecondo luogo di un canale più groſſo, per eſempio largo 20 palmi, ed alto 5, per averne la portata applicava a queſto pure un Regolatore o di legno, o di muro, e ſuperiormente a queſto derivava dal canale un canaletto largo tre, o quattro palmi applicandovi un Regolatore. Coi ſifoni miſurava la portata di queſto, e dal rapporto delle altezze, e larghezze dell' acqua corrente pei due Regolatori argomentava (colla ſua regola delle portate in ragione delle larghezze, e dei quadrati delle altezze) qual foſſe la portata del canale maggiore. Accadendo in terzo luogo di dover trovare la portata di un fiume groſſo, proponeva, che ſi applicaſſe a queſto un Regolatore, e che dal fiume ſi divertiſſe un canale miſurabile, come il precedente, e che colla regola accennata ſi trovaſſe anche la portata del fiume groſſo. Non gli facea caſo la ſpeſa grave che potrebbe occorrere per ſare tai rilievi dicendo, che i concetti grandi, come quello di miſurare l' acqua di un fiume groſſo, non devono caſcare in mente, che a perſone grandi, a Principi potenti, e che poſſono fare una qualche ſpeſa per isſuggire altre ſpeſe maggiori, che ſi ſarebbero per mancanza della cognizione della quantità ricercata dell' acqua, e per isſuggire anche dei diſguſti fra i medeſimi Principi.

46. Ma quantunque alla regola delle velocità come le altezze, o ſia delle portate come le larghezze, ed i quadrati delle altezze, ſi conformino più ſperienze in piccolo; pure perchè tal regola è tuttora ſenza dimoſtrazione, nè è ancora ben verificata da ſperienze in grande, non vedo, che queſto metodo del *Caſtelli* per trovare la miſura dell' acqua corrente per un fiume ſia da abbracciarſi.

47. Il *Guglielmini* pure ſi vale di uno, o più Regolatori, ma in una maniera diverſa. Propone, che al Regolatore ſi applichi una Cateratta, la quale ſi cali fino a un piede, o due, ſotto la ſuperficie dell' acqua corrente pel Regolatore, con che l' acqua ſarà obbligata a gonfiarſi ſuperiormente alla cateratta. E ſupponendo le velocità dell' acqua corrente per quella ſezione così diminuita come le ordinate di una parabola conica col vertice alla ſuperficie dell' acqua ſoſtenuta, tro-

va la quantità dell' acqua del fiume. Se il fiume è così grande, che non vi si possa adattare un Regolatore, suggerisce, che col metodo prescritto si misuri l' acqua dei fiumi minori, che lo compongono, come meglio si può vedere alla fine del lib. 4. della *Misura delle acque correnti* dove alla difficultà della molta spesa risponde col sentimento sopra riferito del P. *Castelli*.

48. Ma ho mostrato, che la velocità delle acque correnti non sono già come qui vuole l' Autore (4, 5, 6,). Dunque nè anche questo metodo del *Guglielmini* è al caso nostro.

49. Altri hanno scielto più perpendicolari di una sezione del fiume, e adottando per sicuro l' uso del pendolo hanno con questo indagato la velocità dell' acqua a diverse profondità di ciascuna perpendicolare, indi trovata una velocità media fra tutte le pretese trovate velocità hanno multiplicato questa nella sezione stessa. Ma ho mostrato quanto sia fallace l' uso del pendolo (21, 22, 23, 24, 25), perciò fallaci saranno stati ancora i risultati di tai rilievi.

50. Potrebbe cader in pensiero a taluno di adoperare il tubo ricurvo del *Pitot* in luogo del pendolo. Ma convien sapere in primo luogo, che l' acqua interna al tubo è soggetta ad oscillazioni sensibili, particolarmente dove il corso dell' acqua è più veloce, onde conviene sciegliere un' altezza di mezzo con una estimazione oculare, che non può tenersi per molto precisa. Oltre di che nei fiumi grandi, ed in tempo di piena, come poter fermare il tubo nel filone, ed a profondità considerabili? Anche la ventola del Sig. Ab. *Ximenes* è soggetta alle sue oscillazioni, ed è difficile il praticarla in tempo di acque alte. L' Autore non ne ha fatto uso finora in un' altezza di acqua, che sia maggiore di piedi 9. 9 di Parigi. Promette di tentare con essa delle sperienze nell' Arno in tempo di mezze piene. Ma in tempo di piena dispera affatto, mentre che il maggior bisogno di tali sperienze è nel colmo delle piene.

51. Il metodo, ch' io sono per proporre, è appunto tale, che si può praticare anche in tempo delle piene, e con una spesa discreta, e di gran lunga minore di quella, che contemplavano il *Castelli* ed il *Guglielmini* (45, 47). Non è altro che una modificazione del metodo del P. *Cabeo*, voglio di-

re, che dove il P. *Cabeo* adoperava delle aste *AB* (*fig.* 12) di legno con un peso in *B*, e con delle vessiche in *C*, io propongo delle aste consimili, ma senza vessiche, e con una parte infima *EB* (*fig.* 14) o di metallo, o armata di metallo in modo, che tutta l' asta *AB* sia un cilindro, ed il metallo dev' essere tanto, che l' asta così preparata posta in un' acqua stagnante abbia a mettersi da sè in una positura verticale, e galleggiare con una porzione *AC* di un piede, o due fuori dell' acqua. Della preparazione di queste aste (ch' io chiamo *ritrometriche*) parlerò verso il fine.

52. Intanto volendo la portata attuale di un fiume, si scielga di esso un tratto *CP'* (*fig.* 15) di duecento, o più tese, che sia dei più retti, e dei più regolari. Si butti una delle descritte aste in un punto *H'* quindici, o venti tese superiormente al punto *C*. Questa dopo alcuni bilanciamenti arriverà in *C* portata dall' acqua sensibilmente parallela a se stessa, e con moto regolare, ed equabile, e questa sia la *AB*, che supporrò inclinata all' avanti. Mostrerò come con quest' asta si possa scoprire assai prossimamente le velocità dell' acqua dalla superficie *CP'* fino al fondo *rl* lungo il cammino, che farà l' asta da *C* in *P'*.

53. Convien esaminare tutte le forze, che tendono ad agitare l' asta *AB* essendo *HMLK* la curva dell' asse *IH* (12), alla quale terminano le velocità dell' acqua, che porta l' asta. Una di queste forze è il peso assoluto dell' asta stessa, il quale si può intendere come raccolto nel centro di gravità dell' asta; e codesto centro sia nel punto *D*; e la verticale *DE* esprima il peso suddetto, che (fatto il rettangolo *im*) equivale a due forze *Di*, *Dm*. Un' altra forza è quella, colla quale l' acqua spinge all' insù ogni porzione della parte immersa *CB* dell' asta, la qual forza per essere la parte *CB* cilindrica, si può considerare come raccolta nel punto *F* di mezzo della stessa parte *CB*, e si può esprimere con una verticale *FG*, che (fatto il rettangolo *hk*) equivale alle due forze *Fk*, *Fh*. E codesta forza *FG* si trova eguale al peso di un volume di acqua eguale alla porzione sommersa *CB* dell' asta. Le altre forze, che tendono ad agitare l' asta sono le impressioni dell' acqua, che la urta dove in un modo, e dove in un altro. Imperocchè è manifesto, che l' asta non

potrà muoversi tutta colla velocità massima IK, nè colla sola velocità minima NM, e che si ridurrà ad una velocità di mezzo; e questa sia la OL comune all' acqua nei punti O, P: di modo che da P in su l' acqua è più veloce dell' asta, e da P in giù è l' asta, ch' è più veloce dell' acqua. Quindi nel punto Q la velocità dell' acqua è ut, e quella dell' asta è $uS = OL$. Dunque in Q l' acqua investe l' asta colla velocità rispettiva St spingendola da Q verso S. Ma in T la velocità dell' acqua è XY, e quella dell' asta è $XZ = OL$. Dunque in T l' asta fende l' acqua colla velocità YZ; e l' acqua reagisce in T contro l' asta con quella stessa forza, colla quale investirebbe l' asta, che fosse ferma, colla velocità ZY diretta da T verso a.

54. Esprimiamo codeste forze dell' acqua. La lunghezza CB della parte immersa dell' asta si dica $= b$, ed il suo diametro $= i$. Si metta con Archimede, che il quadrato del diametro all' aja del cerchio stia come 14 a 11; e si troverà $\frac{11\, i^2}{14} =$ base del cilindro CB. Dunque $\frac{11\, bi^2}{14}$ sarà il volume del cilindro CB. Il peso di un egual volume di acqua sia P. Onde $FG = P$ (53). Si cerchi l' impressione Qg, che fa all' asta normalmente uno strato sottilissimo QSs dell' acqua colla velocità rispettiva St. Poichè b è la lunghezza del cilindro CB, ed i il suo diametro, sarà bi la sua sezione per l' asse. Pertanto si concepisca, che codesto piano bi sia situato in cb' verticalmente, e che sia incontrato dall' acqua direttamente in tutta l' altezza cb' colla velocità $St = u$; intendo per u lo spazio, che può correre l' acqua uniformemente in un tempo $k = 1''$ colla detta velocità. La caduta libera di un grave nel detto tempo k sia h. Si sa, che la velocità alla fine di tale caduta è $2h$. Ma come i quadrati delle velocità di un corpo cadente, così sono le cadute, o sia le altezze dalle quali il corpo cadendo liberamente acquista quella velocità. Dunque facendo $4h^2 : u^2 :: h$ al quarto termine $\frac{u^2}{4h}$, questo sarà la caduta competente alla velocità u.

55. Anche secondo le sperienze dei Signori d' *Alembert*. *Condorcet*

Condorcet, e *Boſſut* pubblicate l'anno 1777 l'impreſſione dell' acqua al detto piano bi è eguale al peſo di un priſma di acqua, che abbia per baſe lo ſteſſo piano, e per altezza la trovata altezza $\frac{u^2}{4h}$ (54), con qualche coſa di più. Non computando qui quel di più, ch' è poco, il volume dell' indicato priſma di acqua ſarà $\frac{biu^2}{4h}$. Ma il peſo del volume $\frac{11bi^2}{14}$ di acqua ſi è detto P (54), e come i volumi di acqua così ſono i loro peſi: dunque il peſo dell' acqua del volume $\frac{biu^2}{4h}$ ſarà $\frac{7Pu^2}{22hi}$, ch' è l' impreſſione ricercata dell' acqua contro il piano bi ſituato in cb'.

56. Ora al ſuddetto piano s'intenda ſoſtituito un cilindro CB del diametro i. Dalle ſperienze 35, ed 89 de' ſoprannominati Signori, ed anche da altre del Sig. *Borda* fatte nell' aria (*Memorie dell' Accademia* di Parigi 1760) raccolgo, che la detta impreſſione contro il piano bi ſta all' impreſſione contro il cilindro ſoſtituito come 20 a 11. Dunque facendo $20 : 11 :: \frac{7Pu^2}{22hi}$ (55) al quarto termine $\frac{7Pu^2}{40hi}$, queſto ſarà il peſo eguale all' impreſſione fatta dall' acqua al detto cilindro poſto verticalmente in cb'. Sia $Hu = x$, ed $Ss = dx$. Facendo $cb' : Ss :: \frac{7Pu^2}{40hi}$ al quarto termine $\frac{7Pu^2 . Ss}{cb' . 40hi}$ $= \frac{7Pu^2dx}{40bhi}$, queſto ſarà l' impreſſione al cilindro verticale fatta in Ss dallo ſtrato di acqua $Qſs$ colla velocità $u = St$. E perchè l' angolo $H'CB$ d' incidenza dell' acqua ſopra l'aſta io l' ho trovato ſempre maggiore di un ſemiretto, ſecondo le dette ſperienze del 1777, l'impreſſione normale al cilindro collocato in cb' all' impreſſione normale al cilindro CB in Q fatta dallo ſteſſo ſtrato di acqua QSs ſtarà come CB a Cq eſſendo Cq verticale incontrata dalla orizzontale BqN. La

prima trovata $= \frac{7Pu^2dx}{40bhi}$ ſia eſpreſſa con una linea orizzontale $\mathfrak{Q}R$, e la ſeconda ſia eſpreſſa con una $\mathfrak{Q}g$ normale all' aſta; e ſia $HI = m$, $HN = n$, ed $HO = q$: onde $IN = m - n = Cq$, e ſi avrà $CB\ (= b) : Cq\ (= m - n) :: \mathfrak{Q}R \left(= \frac{7Pu^2dx}{40bhi}\right) :$

$\mathfrak{Q}g = \frac{7P.(m-n).u^2dx}{40b^2hi}$, eſſendo $u^2dx = (St)^2.Ss$; onde

$\int \mathfrak{Q}g = \frac{7P.(m-n)}{40b^2hi} \int (St)^2.Ss$. Nell' integrazione la coſtante ſi determina mettendo l' integrale $= 0$ quando $x = HO = q$. Facendo di poi $x = HI = m$ ſi avrà la ſomma delle $\mathfrak{Q}g$ da P fino in C.

57. Sarà $Ou = x - q$; e perchè $Cq : CB :: Ou : P\mathfrak{Q}$, ſarà $m - n : b :: x - q : P\mathfrak{Q} = \frac{b.(x-q)}{m-n}$; onde $P\mathfrak{Q}.\mathfrak{Q}g$

$= \frac{7P.(x-q).u^2dx}{40bhi}$, ch' è il momento di ogni $\mathfrak{Q}g$ riferito al punto P. E la ſomma di queſti momenti diviſa per la ſomma delle $\mathfrak{Q}g$, cioè $\frac{\int P\mathfrak{Q}.\mathfrak{Q}g}{\int \mathfrak{Q}g}$ darà la diſtanza del centro delle forze $\mathfrak{Q}g$ dal punto P, com' è noto.

58. Nella integrazione ſi operi come ſi è detto al n. 56. E quando $x = HI = m$, cioè quando $P\mathfrak{Q}$ diviene PC, la detta diſtanza del centro delle forze $\mathfrak{Q}g$ da P ſia Pn; ed nx normale all' aſta ſia in tal caſo $\int \mathfrak{Q}g$ (56), così ſi avrà

$Pn = \frac{\int P\mathfrak{Q}.\mathfrak{Q}g}{nx}$, e tutte le $\mathfrak{Q}g$ diſtribuite lungo la PC equivaleranno alla ſola nx applicata in n.

59. Lo ſteſſo diſcorſo ſi può applicare al caſo di uno ſtrato TZz di acqua preſo al di ſotto del punto P. In queſto caſo eſſendo $x = HX$, ſarà $dx = Zz$, ed $u = YZ$, velocità colla quale l' acqua reagiſce in T con una forza, che equivale all' impreſſione dello ſtrato TZz ſe eſſendo l' aſta ferma l' acqua la incontraſſe colla velocità YZ diretta da Z verſo

T, e coll' angolo d' incidenza $ZTC = H'CB$ (56). Codesta impressione qui pure considerata normale all' asta sia Tb, e si troverà $Tb = \frac{7P.(m-n).u^2dx}{40b^2hi}$ (57) essendo

$u^2dx = (YZ)^2 . Zz$; onde $\int Tb = \frac{7P.(m-n)}{40bhi} \int (YZ)^2 . Zz$. Integrando la costante si trova mettendo l' integrale $= 0$ allorchè sia $x = HN = n$; facendo di poi $x = HO = q$ si avrà la somma delle Tb da B fino in P.

60. Poichè qui $x = HX$ sarà $OX = q - x$. Ma $Cq : CB :: OX : PT$, dunque $m - n : b :: q - x : PT = \frac{b.(q-x)}{m-n}$; ed il momento delle Tb riferito al punto P sarà $PT.Tb = \frac{7P.(q-x).u^2dx}{40bhi}$. E la somma di questi momenti divisa per la somma delle Tb darà la distanza del centro delle impressioni Tb dal punto P.

61. Nell' integrazione la costante si determini come al n. 59. E quando $x = HO = q$, cioè quando BT diviene BP, la detta distanza sia Po, ed oy normale all' asta sia in tal caso $\int Tb$ (59), e così si avrà $Po = \frac{\int PT.Tb}{oy}$, e tutte le Tb distribuite lungo la BP equivaleranno alla sola oy applicata in o.

62. Ora perchè l' asta arrivata in C è ridotta a un moto regolare (52), nè si alza, nè si abbassa, devono essere eguali le due forze contrarie Fk, Di. E perchè i due triangoli FkG, DiE sono simili, sarà anche $FG = DE$, e $kG = iE$, cioè $Fh = Dm$.

63. E perchè il moto dell' asta è equabile (52), e non accelerato, nè ritardato, le forze $nx + Dm$, che tendono ad accelerare il moto, saranno eguali alle contrarie $oy + Fh$, che tendono a ritardare lo stesso moto; e perchè si è trovato $Fh = Dm$ (62), sarà ancora $nx = oy$; o sia $\int \mathfrak{Q}g = \int Tb$,

cioè $\frac{7P.(m-n)}{40b^2hi}\int(St)^2.Ss = \frac{7P.(m-n)}{40b^2hi}\int(YZ)^2.Zz\ (56,59)$, onde $\int(St)^2.Ss = \int(Yz)^2.Zz$ (A) prendendo le St da L fino in c, e le YZ da p fino in L.

64. E finalmente perchè l' asta viaggia parallela a sestessa (52) il centro delle forze nx, Dm dovrà coincidere col centro delle forze contrarie oy, Fh. Il primo dee cadere sopra il punto D, ed il secondo sotto il punto F. Dunque devono coincidere in un qualche punto V fra D, ed F. Quindi si avrà $nx : Dm :: VD : Vn = \frac{VD.Dm}{nx}$; ed insieme $oy : Fh :: VF : Vo = \frac{VF.Fh}{oy}$. Dunque $Vn + Vo = \frac{VD.Dm}{nx} + \frac{VF.Fh}{oy}$. Ma si è trovato $Dm = Fh$ (62), ed $nx = oy$ (63). Dunque $Vn + Vo = \frac{VD.Fh}{nx} + \frac{VF.Fh}{nx} = \frac{(VD+VF).Fh}{nx} = \frac{DF.Fh}{nx}$.

65. Ma $Vn + Vo = Pn + Po = \frac{\int PQ.Qg}{nx}$ (58) $+ \frac{\int PT.Tb}{oy = nx}$ (61, 63). Dunque $\frac{DF.Fh}{nx} = \frac{\int PQ.Qg}{nx} + \frac{\int PT.Tb}{nx}$, cioè $DF.Fh = \int PQ.Qg + \int PT.Tb$
$= \int\frac{7P.(x-q).u^2dx}{40bhi}$ (57) $+ \int\frac{7P.(q-x).u^2dx}{40bhi}$ (60)
$= \frac{7P}{40bhi}\left(\int(x-q).u^3dx + \int(q-x).u^2dx\right)$.

66. E perchè $CB : Bq :: FG : Fh$ sarà $Fh = \frac{Bq.FG}{CB}$ $= \frac{Bq.P}{b}$ (54); e fatta $DF = e$, sarà $DF.Fh = \frac{Bq.Pe}{b} =$ (65) $\frac{7P}{40bhi}\times\left(\int(x-q).u^2dx + \int(q-x).u^2dx\right.$, cioè
$Bq = \frac{7}{40ehi}\times\left(\int(x-q).u^2dx + \int(q-x).u^2dx\right)$ (B).

67. Fatti questi preparativi mi propongo da sciogliere il seguente problema. Date la lunghezza CB della porzione immersa dell' asta, la DF distanza del centro D di gravità dell' asta dal punto F di mezzo della sua porzione immersa, la velocità OL dell' asta, la velocità superficiale IK dell' acqua, e dato l' angolo ACI d' inclinazione dell' asta e in conseguenza il suo complemento BCq, trovare una curva KLH, o una retta KLQ', che essendo scala delle velocità della verticale IS' soddisfaccia ai dati suddetti.

68. Primieramente esamino il caso più semplice, cioè se una retta KLQ' soddisfaccia ai dati esposti. In questo caso le x invece di partire dal punto H partono dal punto Q', e le HI, HO, HN divengono $Q'I = m$, $Q'O = q$, $Q'N = n$, e le St, ZY divengono Si, Zf, onde giusta il *n.* 63 qui si deve avere $\int (Si)^2 . Ss = \int (Zf)^2 . Zz$. E perchè $Q'O : OL :: LS : Si$, sarà $q : OL :: x - q : Si = \frac{OL . (x-q)}{q}$, e $\int (Si)^2 . Ss$ $= \int \frac{(OL)^2 . (x-q)^2 . dx}{q^2}$, e (come si è detto al *n.* 56) integrando in modo, che quando $x = Q'O = q$ l' integrale sia nullo, si avrà $\frac{(OL)^2 . (x-q)^3}{3q^2}$; e fatta indi $x = Q'I = m$ si avrà $\int (Si)^2 . Ss = \frac{(OL)^2 . (m-q)^3}{3q^2}$. Similmente $Q'O : OL :: LZ : Zf$, cioè $q : OL :: q - x : Zf = \frac{OL . (q-x)}{q}$, onde $(Zf)^2 . Zz = \frac{(OL)^2 . (q-x)^2 . dx}{q^2}$; ed integrando così, che quando $x = Q'N = n$ l' integrale sia nullo (59), indi facendo $x = q$ si avrà $\int (Zf)^2 . Zz = \frac{(OL)^2 . (q-n)^3}{3q^2}$. Dovendo pertanto le due somme essere eguali (63) si trova $m - q = q - n$, cioè $OI = ON$. Il che fa vedere, che qualunque sieno le due velocità date IK, OL, purchè tutte le velocità della verti-

cale IS' terminino ad una retta, quella velocità OL dell' acqua, ch' è comune all'asta, corrisponde a un punto O, che dee essere di mezzo della IN, e che in conseguenza la velocità dell' asta in tal caso è la velocità media di tutte le velocità dell' acqua della verticale IN.

69. Essendosi detta al n. 54 $St = u$, in questo caso sarà $u = Si = \frac{OL.(x-q)}{q}$ (68), e $\int (x-q).u^2dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \times \int (x-q)^3.dx$. Fatto l' integrale nullo allorchè sia $x = Q'O = q$, indi fatta $x = Q'I = m$, si avrà $\int (x-q).u^2dx = \frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{4}$. Essendosi pur detta $ZY = u$, in questo caso sarà $u = Zf = \frac{OL.(q-x)}{q}$ (68); e $\int (q-x).u^2dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \int (q-x)^3 dx = \frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(q-n)^4}{4}$ (fatto l' integrale nullo quando $x = Q'N$, e fatta indi $x = Q'O = q$). Dunque $\int (x-q).u^2dx + \int (q-x).u^2dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \times (\frac{(m-q)^4}{4} + \frac{(q-n)^4}{4}) = \frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{2}$ (essendosi trovato al n. 68 $m - q = q - n$). Dunque secondo il n. 66 sarà $Bq = \frac{7}{40ehi} \times \frac{(OL)^2}{q^2}.\frac{(m-q)^4}{2} = \frac{7.(OL)^2.(m-q)^4}{80ehiq^2}$. Se si dirà $IN = c$, $IK = f$, $OL = g$, poichè $OI = ON$ (68), sarà $OI = \frac{1}{2}c = m - q$. E perchè $Q'I : IK :: Q'O : OL$, sarà $m : f :: q : g$, e $q = \frac{gm}{f}$; ed $m - q = \frac{1}{2} c = m - \frac{gm}{f}$; onde $m =$

$\frac{cf}{2.(f-g)}$, e $q=\frac{gm}{f}=\frac{cg}{2.(f-g)}$. Sostituendo si avrà $Bq=\frac{7c^2.(f-g)^2}{320hie}$.

70. Venendo a un caso particolare, in cui sia per esempio la velocità superficiale IK di 10 piedi per ogni minuto secondo, l'altra OL dell'asta di piedi 8, la $DF=e$ (53, 66) $=$ pi. 3; la caduta h di un grave in 1'' $=$ piedi 15, il diametro i dell'asta di due pollici, o sia $=\frac{1}{6}$ di piede, la IN da dedursi dalla lunghezza CB note, e dall' angolo BCq dato, di piedi 12, e la IS' di piedi 14 sarà $c=12$, $f=10$, $g=8$, $e=3$, $h=15$, $i=\frac{1}{6}$, e Bq (69) $=1, 68$, cioè l'angolo BCq di gr. 7, 58'.

71. Se pertanto l' angolo già dato sarà di gr. 7, 58', la vena KLQ' quadrerà esattamente a tutti i dati del Problema, e si potrà dire, che la KLd sia (almeno prossimamente) la scala della velocità della verticale IN; e quando IN formi una buona parte della IS' si potrà ragionevolmente concludere, che tutte le velocità della verticale IS' termino alla retta KLl. Per la qual cosa essendosi detta IS' di piedi 14, l' aja $IS'lK$ sarà di piedi quadrati 107, 33, cioè in ogni minuto secondo per la verticale IS' passerà un velo di acqua di piedi 107, 33 quadrati; i quali divisi per tutta l'altezza IS' di piedi 14 danno una velocità media di piedi $7\frac{2}{3}$.

72. Ma se in vece di gr. 7, 58' fosse stato dato un angolo maggiore oltre gli altri dati del n. 70, si dovrà concludere, che le velocità della verticale IS' non terminano a una retta, ma bensì a una curva KLH. Per rinvenire una curva, che soddisfaccia ai dati io ricorro alla famiglia delle Parabole, giacchè ognuna di queste applicata come la HLK importa, che dalla superficie al fondo il decrescimento di velocità si faccia sempre maggiore, come richiede la mia teoria, che non discorda dalle sperienze.

73. Si esamini pertanto in secondo luogo se la HLK fosse una parabola cubica di secondo genere della equazione px^2

$=y^3$. Poichè $y=\sqrt[3]{px^2}$ quando $x=Hu$ sarà $dx=Ss$, ed $y=ut=\sqrt[3]{(px)^2}$; e quando $x=HO=q$ sarà $y=\sqrt[3]{pq^2}$.
Dunque $St=ut-OL=\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}$, e $\int(St)^2.Ss$

$\int(\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}).dx$. Integrando per modo, che quando $x=HO=q$ l' integrale sia nullo; indi facendo $x=HI=m$ si avrà $\int(St)^2.Ss=\sqrt[3]{p^2}(\frac{3m^2\sqrt[3]{m}}{7}-\frac{6m\sqrt[3]{q^2m^2}}{5}+qm\sqrt[3]{q}$
$-\frac{8q^2\sqrt[3]{q}}{35})$. Quando poi sia $x=HX$ si avrà $dx=Zz$, ed $y=XY=\sqrt[3]{px^2}$, onde $YZ=OL-XY=\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}$,
$\int(YZ)^2.Zz=\int(\sqrt[3]{pq^2}-\sqrt[3]{px^2}).dx$; ed integrando così, che quando $x=HN=n$ si abbia zero, indi facendo $x=HO=q$ si troverà $\int(YZ)^2.Zz=\sqrt[3]{p^2}\times(\frac{8q^2\sqrt[3]{q}}{35}-\frac{3}{7}n^2\sqrt[3]{n}+\frac{6n\sqrt[3]{q^2n^2}}{5}$
$-qn\sqrt[3]{q})$.

74. E perchè le due somme ritrovate devono esser eguali (63) si troverà $\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35}-\frac{3}{7}.(m^2\sqrt[3]{m}+n^2\sqrt[3]{n})$
$+\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}.(m\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{n^2})-q\sqrt[3]{q}.(m+n)=0$.

75. Poichè $St=u$ (54) $=\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}$ (73), sarà
$\int(x-q).u^2dx=\int(x-q).(\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}).dx=$ (riducendo l' integrale al zero allorchè $x=q$, indi facendo $x=m$)
$\sqrt[3]{p^2}\times(\frac{3m^3\sqrt[3]{m}}{10}-\frac{3m^2\sqrt[3]{q^2m^2}}{4}+\frac{qm^2\sqrt[3]{q}}{2}-\frac{3qm^2\sqrt[3]{m}}{7}$
$+\frac{6qm\sqrt[3]{q^2m^2}}{5}-q^2m\sqrt[3]{q}+\frac{5q^3\sqrt[3]{q}}{28}$. Così perchè quando $x=HX$ si è detta $YZ=u$ (59) $=\sqrt[3]{pq^2}-\sqrt[3]{px^2}$ (73), sarà
$\int(q-x).u^2dx=\int(q-x).(\sqrt[3]{pq^2}-\sqrt[3]{px^2})^2.dx=$ (mettendo l' integrale $=0$ quando $x=n$, indi facendo $x=q$)

$$\sqrt[3]{p^2} \times \left(\frac{5q^3\sqrt[3]{q}}{28} + \frac{3n^3\sqrt[3]{n}}{10} - \frac{3n^2\sqrt[3]{q^2n^2}}{4} + \frac{qn^2\sqrt[3]{q}}{2} - \frac{3qn^2\sqrt[3]{n}}{7} \right.$$
$$\left. + \frac{6qn\sqrt[3]{q^2n^2}}{5} - q^2n\sqrt[3]{q} \right).$$

76. Dunque $Bq\ (66) =$

$$\frac{7}{40ehi} \times \int \left((x-q) \, . \, u^2 dx + \int (q-x) \, . \, u^2 dx \right) =$$
$$\frac{7\sqrt[3]{p^2}}{40ehi} \times \left(\frac{3}{10} . (m^3\sqrt[3]{m} + n^3\sqrt[3]{n}) - \frac{3}{4}\sqrt[3]{q^2} . (m^2\sqrt[3]{m^2} + n^2\sqrt[3]{n^2}) \right.$$
$$+ \frac{1}{2} q\sqrt[3]{q} . (m^2 + n^2) - \frac{3}{7} q . (m^2\sqrt[3]{m} + n^2\sqrt[3]{n})$$
$$\left. + \frac{6}{5} q\sqrt[3]{q^2} . (m\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{n^2}) - q^2\sqrt[3]{q} . (m+n) + \frac{5q^3\sqrt[3]{q}}{14} \right).$$

77. Colla equazione del n. 74 convien trovare nei casi particolari quale sia fra le infinite parabole della equazione $px^2 = y^3$ quella, che si potrebbe confare coi dati del Problema a riserva dell' angolo d' inclinazione dell' asta; per passare indi a vedere colla equazione del n. 76 se quella parabola così trovata si confaccia ancora coll' angolo dell' asta già dato. Perciò ritorno all' esempio del n. 70, dove si è fatta $IK = 10$, $OL = 8$, $DF = e = 3$, $h = 15$, $i = \frac{1}{6}$, ed $IN = m - n = 12$. Quindi sarà $n = m - 12$; e per la natura della parabola cubica di secondo genere sarà $(IK)^3 : (OL)^3 :: (IH)^2 : (OH)^2$, cioè $1000 : 512 :: m^2 : q^2$; onde $q = m\sqrt{\frac{512}{1000}} = m - OI$. Dunque $m = \frac{OI\sqrt{1000}}{\sqrt{1000} - \sqrt{512}}$. Poichè la somma dei quadrati delle St da L fino in c dev' essere eguale alla somma dei quadrati delle YZ da L fino in p (63), accade, che il punto O si trova sempre poco sotto il punto di mezzo della IN, onde se nella formola trovata $\frac{OI\sqrt{1000}}{\sqrt{1000} - \sqrt{512}}$ si metta $OI = \frac{IN}{2}$, si avrà un valore, che di poco mancherà dal giusto valore della m. Quindi perchè IN

si è fatta $=12$, mettendo nella detta formola $OI=6$ si avrà $21\frac{7}{9}$, ch' è un limite della m, o sia un valore minore, ma di poco, della m.

78. Infatti si metta $m=21\frac{7}{9}$. Così sarà $n=HI-IN$ $=21\frac{7}{9}-12=9\frac{7}{9}$, e q (trovata qui sopra $=m\sqrt{\frac{512}{1000}}$) $=15,58$. Fatta la sostituzione di questi valori delle m, n, q nella equazione del n. 74, i termini, che la compongono, danno $0,002$ (si veda il calcolo nel fine), il che mostra che si può prendere $21\frac{7}{9}$ pel vero valore della m. E perchè $p=\frac{y^3}{x^2}$, sarà $p=\frac{(IK)^3}{(HI)^2}=\frac{1000}{m^2}=2,109$. Sostituiti questi valori delle m, n, q, p nella equazione ultima del n. 76 si avrà $Bq=1,78$, che dà l' angolo BCq di gr. 8, 26'.

79. Quindi se l' angolo già dato (67) sarà stato per l' appunto di gr. 8, 26' la parabola cubica così trovata HLK quadrerà esattamente con tutti i dati del Problema, e si potrà dire, che la scala delle velocità della verticale IN sia assai prossimamente l' arco MLK della parabola suddetta, e qualora la NS' sia piccola porzione della IS', sarà ragionevole il concludere, che le velocità di tutta la verticale IS' terminino alla stessa parabola HLK. Quindi fatta la IS' di piedi 14, l'aja $IS'V'K$, ch'è $\frac{3}{5}HI.IK-\frac{3}{5}.HS'.S'V'$, sarà di piedi quadrati 107, 17; che esprimeranno la portata della verticale IS', o sia il velo d' acqua, che in 1'' passa per la verticale stessa. E dividendo per $IS'=14$ il detto velo si avrà piedi 7, 65, velocità media delle velocità da I fino in S'.

80. Che se l' angolo già dato (67) fosse maggiore del trovato qui sopra, si passi ad esaminare in terzo luogo se la curva ricercata fosse una parabola conica della equazione $px=y^2$.

81. Operando come si è fatto rapporto alla parabola cubica di secondo genere in luogo della equazione del n. 74 dedotta dal n. 63 si avrà $8\sqrt{q}(m\sqrt{m}+n\sqrt{n})+2q^2-6q\times(m+n)-3m^2-3n^2=0$.

82. Ed in luogo della equazione del n. 76 dedotta dal

n. 66 qui si avrà $Bq(66) = \frac{7p}{40ehi} \times (\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{3}n^3$

$- \frac{4}{5}\sqrt{q}\,(m^2\sqrt{m} + n^2\sqrt{n}) + \frac{4}{3}q\sqrt{q}\,(m\sqrt{m} + n\sqrt{n}) - q^2\,(m + n$

$+ \frac{4}{5}q^3))$.

83. Qui pure ripiglio, come al n. 77, le determinazioni fatte per l' esempio del n. 70, cosicchè essendo $IN = 12 = m - n$, sarà $n = m - 12$; e per la natura della parabola conica sarà $\overline{IK}^2 : \overline{OL}^2 :: IH : OH$, cioè $100 : 64 :: m : q = \frac{64m}{100}$. Ma $q = HO = HI - OI = m - OI$. Dunque $\frac{64m}{100} = m - OI$, ed $m = \frac{100OI}{36}$. Un limite della m si troverà sempre colla regola del n. 77, cioè facendo l' ipotesi di $OI = \frac{ON}{2} =$ (in quest' esempio) 6, onde qui risulta $m = 16\frac{2}{3}$. Si metta dunque prima $m = 16\frac{2}{3}$. E sarà $n = m - 12 = 4\frac{2}{3}$: e $q = \frac{64m}{100}$ $= 10\frac{2}{3}$. Sostituendo questi valori delle m, n, q nell' equazione del n. 81, si ottiene 4, 73. Mettendo in appresso $m = 17$, sarà $n = m - 12 = 5$, e $q = 10, 88$. Sostituiti questi nuovi valori delle m, n, q nella stessa equazione del n. 81, i termini che la compongono danno $-$ 115, 61; il che mostra, che il giusto valore della m sta fra il $16\frac{2}{3}$ ed il 17; e col metodo noto si trova $m = 16, 68$: onde $n = m - 12 = 4, 68$, e $q = \frac{64m}{100} = 10, 67$; e $p = \frac{(IK)^2}{IH} = \frac{100}{m}$ $= 5, 99$. Sostituiti questi valori delle m, n, q, p nel va-

lore della Bq trovato al n. 82 ſi ha $Bq = 2, 11$, che dà l' angolo BCq di gr. 9. 58'.

84. Dunque ſe l' angolo già dato (67) foſſe appunto di gr. 9, 58' la parabola conica trovata ſarà in queſt'eſempio la curva ricercata, perchè ſoddisfa a tuti i dati del Problema; e fatta IS' di piedi 14 l' aja $IS'V'K$ ſarà di piedi quadrati 101, 46 portata della verticale IS', che diviſi per 14 danno la velocità media di piedi 7, 53.

85. Ma ſe l' angolo dato foſſe fra i gr. 8, 26' trovati al n. 78, ed i gr. 10, 12' trovati al n. 83, ſi paſſi ad eſaminare una qualche parabola intermedia. Mi ſpiego. Si metta l' equazione $px^{29} = y^{30}$, e ſi vada ſcemando l' eſponente della x di una unità per volta accreſcendo ogni volta pure di una unità l' eſponente della p, e ſi avrà la ſerie di equazioni

$p x^{29} = y^{30}$

$p^2 x^{28} = y^{30}$

$p^3 x^{27} = y^{30}$

ecc.

così ſi arriverà alle ſeguenti

$p^{10} x^{20} = y^{30}$ . . . . cioè $px^2 = y^3$

$p^{11} x^{19} = y^{30}$

$p^{12} x^{18} = y^{30}$ . . . . $p^2 x^3 = y^5$

$p^{13} x^{17} = y^{30}$

$p^{14} x^{16} = y^{30}$ . . . . $p^7 x^8 = y^{15}$

$p^{15} x^{15} = y^{30}$ . . . . $px = y^2$

$p^{16} x^{14} = y^{30}$ . . . . $p^8 x^7 = y^{15}$

$p^{17} x^{13} = y^{30}$

$p^{18} x^{12} = y^{30}$ . . . . $p^3 x^2 = y^5$

ecc. ecc.

Le dette equazioni cominciando dalla prima $px^{29} = y^{30}$, poſte all' eſame ſimile al già fatto delle due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, danno un angolo ſempre maggiore, coſicchè ſe l' angolo dato ſarà fra i due ritrovati colle dette due equazioni converrà ten-

tare altri esami di alcune delle qui esposte quattro equazioni intermedie fra le dette due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, finchè si arrivi a quella, che soddisfaccia intieramente, o sufficientemente al Problema. E quando mai nè anche fra le dette quattro equazioni intermedie si trovasse quella, che quadri quanto si desiderasse, si potrà sempre instituire un' altra serie di equazioni, che parta da una cogli esponenti più alti, come sarebbe se si partisse dall' equazione $px^{99} = y^{100}$, e per tal maniera c' incontreremo finalmente in una parabola, che soddisfaccia con quella precisione, che un volesse, al Problema.

86. Lo stesso discorso si applichi opportunamente al caso, in cui l' angolo dato fosse fra i gr. 7, 58′ trovati al n. 70, ed i gr. 8, 26′ trovati al n. 78; come pure si applichi al caso, in cui l' angolo dato fosse maggiore dell' angolo di gr. 9, 58′ trovati al n. 83; con che parmi di avere sciolto il Problema propostomi al n. 67, che tende a trovare non tanto la portata della verticale *IS′*, quanto la legge dei decrescimenti della velocità della superficie fino al fondo.

87. Vedo benissimo, che quantunque si trovi una tal parabola, che quadri intieramente alle condizioni del Problema, non per questo è dimostrato, che la vera scala delle velocità sia quella stessa parabola, potendo essere, che nel tempo stesso la vera scala delle velocità fosse per esempio una ellisse. Ma ognun vede ancora che perchè una ellisse soddisfaccia a tutte le medesime condizioni del Problema, cui soddisfa una parabola, convien che quella ellisse si adatti così all' arco *MLK* della parabola trovata, che le conseguenze dedotte dalla Parabola debbano essere prossimamente quelle, che si dedurrebbero dalla ellisse.

88. Per agevolare il metodo esposto darò qui la formola generale del limite della m da trovarsi colla regola accennata al n. 77. Sia pertanto $p^t x^r = y^{t+r}$ l' equazione generale delle parabole. Poichè quando $x = HI$ è $y = IK$, onde $p^t (HI)^r = (IK)^{t+r}$, e quando $x = HO$ è $y = OL$, onde $p^t (HO)^r = (OL)^{t+r}$, sarà $p^t = \frac{(IK)^{t+r}}{(HI)^r} = \frac{(OL)^{t+r}}{(HO)^r} = \frac{(OL)^{t+r}}{(HI-OI)^r}$, dal che si

trova $HI = m = \frac{OI \sqrt[r]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[r]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[r]{(OL)^{c+r}}}$, ed $\frac{\frac{IN}{2} \sqrt[r]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[r]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[r]{(OL)^{c+r}}}$, limite proſſimamente minore della m (77).

89. Quindi ſe ſi doveſſe prendere in eſame l' equazione $p^3 x^2 = y^5$ ſarebbe $c = 3$, $r = 2$, onde il limite ſarebbe $\frac{\frac{IN}{2} \sqrt[2]{(IK)^5}}{\sqrt[2]{(IK)^5} - \sqrt[2]{(OL)^5}} =$ (giuſta il n. 70) $\frac{6 \sqrt{10^5}}{\sqrt{10^5} - \sqrt{8^5}} = 14$ proſſimamente, limite della $m = HI$. Con queſto ſolamente ſi conoſce ſubito, che la equazione $p^3 x^2 = y^5$ non può eſſere al caſo contemplato finora di $IS' =$ piedi 14, perchè eſſendo $m =$ piedi 14, o poco più (77), il vertice H caderebbe quaſi ſul fondo del fiume, onde ſopra quel fondo l' acqua non avrebbe quaſi moto, il che non è vero.

90. Il Sig. Ab. *Ximenes* dice di aver trovato colle ſue ſperienze, che la velocità preſſo il fondo era di un quinto minore della velocità alla ſuperficie. Ma quelle ſperienze ſono ſtate fatte in piccoli corſi di acque, e creſcendo la velocità creſce ancora la reſiſtenza del medeſimo fondo; per la qual coſa è da aſpettarſi, che in tempo di piena la velocità dalla ſuperficie al fondo cali ſenſibilmente più di un quinto. Inclino bensì a credere, che non arrivi a calare la metà. In queſta ipoteſi, che dee poterſi verificare ſe non altro colle mie aſte ritrometriche, pare che nell' eſempio del n. 70. contemplato fin qui non poſſa aver luogo nè anche la parabola conica, giacchè queſta nel detto eſempio importerebbe un decreſcimento di velocità dalla ſuperficie al fondo più della metà, perchè per eſſere $HI = 16, 68$ (83), $IK = 10$, ed $HS' = 2, 68$, ſi trova l' ordinata SV al fondo di pi. 4,008. Meno poi per una ſimil ragione poſſono appartenere al detto eſempio le altre equazioni della ſerie del n. 85. dalla equazione $px = y^2$ in giù. Ma le portate della verticale IS', che riſultano colle equazioni della detta ſerie fino alla $px = y^2$ ſtanno fra i piedi quadrati 107, 17 (79), e 104, 14 (84),

che si discostano di poco dalla portata di pi. q. 107, 33 trovata al n. 71. nella ipotesi, che le velocità terminino ad una retta. Dunque quando non si cerchi la scala delle velocità, ma soltanto la portata della verticale *IS'*, e che non si curi di aver questa con tutto il rigore (il quale in molti casi è superfluo) si potrà ottenere l' intento a sufficienza (ed al certo cento volte meglio, che con qualunque degli altri metodi finora proposti) stando all' ipotesi, che le velocità terminino ad una retta, come al n. 71. Ed in questo caso si declina dal fastidio di quei calcoli prolissi, che occorrono nelle ipotesi, che la scala delle velocità sia una qualche curva, e l'angolo d'inclinazione dell'asta (ch'è il più difficile da rilevarsi) in questo caso basterà che si abbia affatto all' ingrosso, per poter dedurre da esso la *Cq*, la quale con tre, o quattro gradi di più, o di meno riesce sensibilmente la medesima.

91. Mi si potrebbe fare la seguente obbiezione. Non è così facile il trovare in ogni fiume un tratto di 200 tese, che sia così regolare, onde l'acqua vi corra con quella equabilità di moto, che richiederebbe lo sperimento; perchè anche nei tratti meno irregolari si danno delle ineguaglianze sensibili, e frequenti, per le quali la velocità dell'acqua varia non una, ma più volte ora crescendo, dove la sezione diviene alquanto minore, ed ora calando, dove la sezione si fa alquanto maggiore. Quindi è, che dove il fiume affretta il suo moto, l'asta a cagione della sua inerzia tarderà a concepire la velocità sua terminale conveniente a quel nuovo maggior corso dell'acqua, e rimarrà troppo indietro; e dove l' acqua rallenterà il suo moto, l'asta riterrà per la sua inerzia per qualche tempo una velocità maggiore del dovere, e scorrerà troppo avanti, il che può fare, che la velocità dell' asta discordi da quelle velocità, ch'io mi son figurato nella ipotesi di un corso equabile dell'acqua, e che perciò non sieno per valere le deduzioni da me esposte.

92. Ma qui rispondo, che le mie aste sono molto ubbidienti ai moti dell'acqua, cosicchè in un passaggio da una velocità ad altra l'errore indicato non può essere, che tenue, come spiegherò in appresso. E nel caso di parecchj di tai passaggi da una velocità minore ad una maggiore, e poi da una maggiore ad una minore, ecc. dico, che siccome l'errore al crescere

della velocità del fiume è in difetto, e nel calare della velocità del fiume è in eccesso, dandosi parecchj di tali errori nel tratto dello sperimento perchè all'uno in difetto dee succederne un altro in eccesso, dovrà accadere che l' uno compensi l'altro di mano in mano, cosicchè alla fine dello sperimento l'errore totale sia tuttavia tenue, e trascurabile.

93. Per fare poi comprendere, come ho promesso, che le mie aste ritrometriche devono essere molto ubbidienti ai moti dell'acqua, prima darò di questo una congettura sorte dedotta dalla teoria, e poi verrò alla sperienza, e particolarmente ad uno sperimento immediato, e ch'io giudico decisivo, fatto colle aste medesime. Pertanto si metta, che una delle accennate aste galleggi verticale, e quieta in un'acqua stagnante, e che il suo centro di gravità cada appunto nel mezzo della parte sommersa. Allora l' acqua concepisca a un tratto una velocità orizzontale, ed eguale in superficie, e sotto la superficie. In tal caso si potrà considerare l' azione dell' acqua corrente contro l' asta come raccolta nel punto di mezzo della detta parte sommersa. E perchè nel medesimo punto cade anche il centro di gravità dell' asta, ne viene, com'è noto, che l'asta si muoverà sempre parallela a sestessa, e perciò verticale. La velocità dell'acqua si dica $= c$, e la velocità dell' asta, che sarà crescente, dopo un qualche tempo t si dica V, e la velocità rispettiva dell' acqua contro l'asta, cioè $c - V$, si dica u. Giusta il n. 56. sarà $\frac{7Pu^2}{40hi}$ l' impressione dell' acqua sopra l'asta, essendo P il peso dell' asta, h la caduta di un grave in un tempo $k = 1''$, ed il diametro dell'asta cilindrica sia $= i$. Secondo le note formole si avrà $2h . \frac{7Pu^2}{40hi} . dt = kPdV$. E perchè si è detto $c - V = u$ si troverà $\frac{7dt}{20ki} = \frac{dV}{(c-V)^2}$. Ed integrando così, che quando $t = 0$ sia $V = 0$, si troverà $t = \frac{20ki}{70} . \frac{V}{c-V}$.

94. Poichè gli aumenti, e decrementi di velocità, che possono accadere in un tratto del fiume scielto pel più regolare

ſare non dovrebb' eſſere maggiore di un piede per ogni minuto ſecondo, ſi metta, che la velocità c, che ſi ſuppone al n. 93. concepita a un tratto dall'acqua prima ſtagnante, ſia di un piede per ogni minuto ſecondo, onde ſia $c=1$; ed il diametro i dell'aſta ſi metta di due pollici, o ſia di $\frac{1}{6}$ di piede, e $k=1''$, e ſi cerchi in quanto tempo l'aſta avrà concepita la metà della velocità dell'acqua, e poi in quanto tempo avrà concepito $\frac{9}{10}$ della velocità ſteſſa dell'acqua, per la qual coſa ſi dovrà mettere pel primo caſo $V=\frac{1}{2}$, e pel ſecondo $V=\frac{9}{10}$; e ſi troverà, che l'aſta avrà guadagnato la metà della velocità dell'acqua in meno di un mezzo minuto ſecondo, e che l'avrà guadagnata quaſi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in poco più di $4''$.

95. E ſe l'aſta invece di eſſere verticale ſi trovaſſe inclinata con un angolo per eſempio di 30 gradi, l'impreſſione $\frac{7Pu^2}{40hi}$ del caſo precedente ſtarebbe all'impreſſione di queſto caſo come il raggio al coſeno di gr. 30 (56), coſicchè queſta ſarebbe proſſimamente $\frac{3Pu^2}{20hi}$; e replicando il calcolo dei n. 93, 94 ſi trova $t=\frac{10ki}{3C}\cdot\frac{V}{c-V}$, e che l'aſta avrà guadagnato la metà della velocità dell'acqua in $33'''$, e che l'avrà guadagnata quaſi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in $5''$.

96. Se aveſſi attribuito all'acqua quella qualunque viſcoſità, che ſembra non poterſi negare all'acqua dei fiumi torbidi, il che avrei potuto fare nell'ultimo caſo mettendo l'impreſſione dell'acqua $=\frac{3Pu^2}{20hi}+\frac{P}{V}$, intendendo per r un nu-

mero comunque grande (purchè finito), avrei trovato una puntualità anche maggiore dell' aſta in concepire i $\frac{9}{10}$ della velocità dell' acqua; anzi avrei trovato, che in breve avrebbe concepito tutta intiera la velocità dell' acqua. Ella è queſta la da me indicata congettura forte dedotta dalla teoria per dire, che le mie aſte ſiano per eſſere molto ubbidienti ai movimenti diverſi dell' acqua, giacchè il caſo qui ſuppoſto non è gran coſa diverſo da quello delle aſte, che impiego per la miſura delle velocità de' fiumi.

97. Per altro la ſperienza in queſta materia vale anche più della teoria. Una ſperienza molto ovvia ſarebbe quella di gettare un qualunque galleggiante con una qualunque velocità, e direzione orizzontale in un' acqua ſtagnante. Si vedrà, che queſto ben preſto ſi riduce alla quiete. Argomento certo, che mettendo quello ſteſſo galleggiante in un' acqua, che corra con qualunque velocità, quello pure con preſtezza concepirà la velocità dell' acqua, come ſi può ſperimentare in qualunque fiume. Ma eccomi all' accennato ſperimento fatto colle aſte medeſime. Nel Po grande preſſo Ferrara entrato in una piccola nave ho abbandonato all' acqua due aſte cilindriche di legno lunghe ognuna piedi $12\frac{1}{2}$ armate a un eſtremo di tanto piombo, che ſono rimaſte fuori dell' acqua con una porzione di un piede e mezzo circa, e dopo alcuni bilanciamenti l' una precedeva all' altra con una diſtanza di circa dieci piedi, ed ambe viaggiavano con moto equabile, e parallele a ſe ſteſſe mentre io le ſeguitava in nave. Dopo qualche tempo con un legno biforcato applicato colle due branche verſo il punto di mezzo della parte immerſa dell' aſta d' avanti la ho ſpinta con forza accelerandone la ſua velocità procurando di non alterare la ſua poſitura, con che io la ho diſcoſtata di più dall' altra. Ceſſando indi di ſpingerla ſono ſtato attento per vedere ſe in appreſſo continuava a diſcoſtarſi di più dall' altra a cagione dell' impeto da me impreſſole, il quale è certo, che non dovett' eſſere ſmorzato dall' acqua meno veloce in un iſtante. Ma per quanto io, ed altri, ch' erano con me, ci impiegaſſimo di attenzione, non potemmo accorgerci di un maggior allontanamento, che foſſe diſcerni-

bile all' occhio. Indizio manifesto, che l'asta da me posta in un moto sensibilmente maggiore di quello, che avea prima, ritornò alla velocità di prima quasi subito, o sia in un tempo molto breve. Lo stesso tentai coll'altr'asta più indietro spingendola contro il corso dell'acqua col mio legno biforcato. Anche questa dopo che da me fu abbandonata, ricuperò la velocità dell'altra così presto, che la sua distanza dall' altra cessata la mia pressione non si fece maggiore, come avrebbe dovuto succedere se nel ricuperare la velocità primiera, e dell'altr'asta, avesse impiegato un tempo notabile. Desidero, che altri tentino lo stesso sperimento, ch'io giudico attissimo per far concludere, che le aste da me proposte devono essere di tutta quella puntualità in secondare i moti dell'acqua, che richiedesi per l'uso di esse da me proposto.

96. Dirò ora qualche cosa intorno al modo di preparare le aste. Se l'asta di legno destinata per lo sperimento sarà di poca lunghezza, per trovare quanto metallo vi si debba unire, acciocchè messa nell'acqua sporga sopra la superficie un piede o due, ciò si potrà ottenere facilmente mettendo l'asta nell'acqua di un qualche pozzo, ed attaccandovi all' estremo inferiore ora più, ed ora meno di metallo, finchè si veda, che l'asta abbandonata all'acqua si metta in una positura verticale rimanendo fuori dell'acqua quel piede o due, che si vorrà. Egli è però d'avvertire, che quell'asta di legno deve prima essere stata tenuta per qualche tempo sott' acqua acciocchè il legno s'imbeva di quella quantità di acqua, che può assorbire, particolarmente se il legno sarà secco, e poroso. Altrimenti si potrebbe dare, che nel principio dello sperimento l'asta sporgesse fuori dell'acqua per esempio un piede, e che nel fine non ne sporgesse fuori che un mezzo piede per essersi imbevuta alquanto di acqua nell'atto dello sperimento, e divenuta così alquanto più pesante.

97. Ma se l'asta sarà così lunga, onde non si abbia un pozzo con tant'acqua, che sia sufficiente pel sopra descritto esame, si potrà fare uso di un'acqua qualunque stagnante di qualche vasca, o buca *ABC* (*fig.* 16.) nella seguente maniera. L'asta sia da comporsi di due pezzi, cioè di uno *DE* di quattro in cinque piedi da unirsi all'altro *GH* con viti, o in altra maniera. Al pezzo *DE* si unisca tanto metallo in

F, onde posto nell'acqua o di un pozzo, o della buca stessa *ABC*, resti fuori dell' acqua con quella lunghezza *DN*, che si vorrà. Si trovi il centro di gravità dell' altro pezzo *GH*, o sia quel punto *K*, dal quale sospeso rimanga in equilibrio. Vi si attacchi uno spago *IOL*, e si metta sull' acqua *AC*, ed al punto *O* dello spago nella verticale *KO* si attacchi tanto metallo, che appena basti per fare, che il pezzo *GH* si sommerga tutto. Il metallo in *O* con l'altro in *F* farà la quantità di metallo da unirsi all' asta composta dei due pezzi *GH*, *DE*, onde questa così messa nell'acqua possa galleggiare con una porzione *DN* fuori dell' acqua, com'è manifesto. Non mancheranno altri metodi per trovare lo stesso, e forse più comodi secondo le circostanze. A me basta di averne indicato uno.

98. Trovata la quantità del metallo da unirsi all' asta saremo in libertà di attaccare lo stesso metallo a un estremo dell' asta dopo di averlo conformato in un cilindro del diametro dell' asta, o pure di unirlo all' asta incastrandovelo distribuito come si crederà più opportuno, purchè col legno venga a formare un cilindro solo. E qui avvertirò, che giusta l'equazione *B* del n. 66. la *Bq* (*fig.* 15.) è in ragione inversa della *e*, o sia della distanza del centro di gravità *D* dell' asta dal punto *F* di mezzo della parte sommersa *CB*. E perchè si può sempre unire il detto metallo all' asta distribuito in modo, che il centro di gravità *D* resti più o meno lontano da *F*, si vede che sarà in nostra mano il fare, che l'angolo *BCq* d' inclinazione dell' asta sia per riuscire maggiore o minore, giacchè quanto più *D* sarà vicino ad *F* il detto angolo sarà maggiore.

99. Allorchè si avrà scielto quel tratto di fiume per lo sperimento, che sia il più regolare, e lungo circa 200 tese, o più, secondo che si crederà meglio, per sapere la lunghezza da darsi alle aste, che si vorranno impiegare, converrà fare almeno tre sezioni di quel tratto, una nel mezzo, ed una per ogni estremo. Una di queste sia *ABG* (*fig.* 17.), colla quale si conoscerà la lunghezza *FG* da darsi a un di presso all' asta, che dovrà viaggiare nel filone, e le lunghezze *HI*, *DE* da darsi alle laterali: e lo stesso si dica pel caso, in cui se ne voglia impiegare più di tre; giacchè quante più se ne

impiegheranno, il rilievo ſarà più preciſo; e nel Po grande, aſſai largo, tre ſarebbero ſicuramente poche. Poi ſarà bene il fare degli ſcandagli frequenti lungo il viaggio da farſi da ciaſcuna aſta per rilevare ſe per avventura la lunghezza delle aſte ſcielta colla ſola iſpezione delle tre ſezioni foſſe per qualcuna di troppo a motivo di un qualche doſſo, che s' incontraſſe in quel cammino.

100. Nel Po grande ſi può ſeguitare ogni aſta con una nave, con che ſi potrà oſſervare con qualche preciſione l' angolo d' inclinazione dell' aſta per ſapere proſſimamente la ſcala delle velocità. E lo ſteſſo ſi dica di tutti i fiumi navigabili almeno a ſeconda del loro corſo anche in tempo di piena. E così ſi potranno ricuperare le aſte per un altro ſperimento. Il tempo, che ogni aſta impiegherà nel correre la lunghezza ſtabilita, dovrà miſurarſi o con un orologio a ſecondi, o con un pendolo a ſecondi. Nei torrenti converrà contentarſi di oſſervare l' angolo di ogni aſta all' ingroſſo (90) ſtando ſulla ripa, al più con l' occhio armato. Ed in queſti per ricuperare le aſte converrà accorrere alle curvature del fiume inferiormente al ſito dello ſperimento, dove il filone ſi accoſta alla ripa, e ſi ſa, che i galleggianti finalmente vanno al filone. Nel reſto mi rimetto all' avvedutezza, induſtria, e ſagacità di quelli, che ſi accigneſſero ad eſperimenti di queſta fatta, che ſono dell' ultima importanza per promuovere una ſcienza, dalla quale può dipendere la felicità, o l' eſterminio di paeſi intieri, e che perciò merita d' eſſere protetta con impegno da più Sovrani.

Calcolo accennato al n. 78.

$l.m = l.21\frac{7}{9} \ldots = 1.3380136$

$l.\sqrt{512} \ldots\ldots = 1.3546350$

$= 2.6926486$

$l.\sqrt{1000} \ldots\ldots = 1.5000000$

$l.q. = l.m\sqrt{\frac{512}{1000}} \ldots = 1.1926486$

$l.n = l.9\frac{7}{9} \ldots = 0.9902402$

$l.16 \ldots\ldots\ldots = 1.2041200$

Xxxx iii

$l. q^2$ . . . . $= 2.3852972$
$l. \sqrt[3]{q}$ . . . . $= 0.3975495$
$l. 35$ . . . . $= 1.5440680$

$l. \frac{16 q^2 \sqrt[3]{q}}{35}$ . . . . . . $= 2.4428987$ n. 277,267
$l. 3$ . . . . $= 0.4771212$
$l. m^2$ . . . . $= 2.6760272$
$l. \sqrt[3]{m}$ . . . . $= 0.4460045$

3.5991529
$l. 7$ . . . . $= 0.8450980$

$l. \frac{3}{7} . m^2 \sqrt[3]{m}$ . . . . $= 2.7540549$ n. 567,616
$l. 3$ . . . . $= 0.4771212$
$l. n^2$ . . . . $= 1.9804804$
$l. \sqrt[3]{n}$ . . . . $= 0.3300801$
$l. \frac{3}{7} n^2 \sqrt[3]{n}$ . . . . . . $= 1.9425837$ n. 87,616
$l. 6$ . . . . $= 0.7781512$
$l. \sqrt[3]{q^2}$ . . . . $= 0.7950991$

1.5732503
$l. 5$ . . . . $= 0.6989700$

$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2}$ . . . . $= 0.8742803$
$l. m$ . . . . $= 1.3380136$
$l. \sqrt[3]{m^2}$ . . . . $= 0.8920091$
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2} . m \sqrt[3]{m^2}$ . . $= 3.1043030$ n. 1271,461
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2}$ . . . . $= 0.8742803$
$l. n$ . . . . $= 0.9902402$
$l. \sqrt[3]{n^2}$ . . . . $= 0.6601601$
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2} . n \sqrt[3]{n^2}$ . . $= 2.5246806$ n. 334,719
$l. q$ . . . . $= 1.1926486$
$l. \sqrt[3]{q}$ . . . . $= 0.3975493$
$l. (m+n) = l. (21 \frac{7}{9} + 9 \frac{2}{9}) = 1.4990758$
$l. q \sqrt[3]{q} . (m+n)$ . . $= 3.0892739$ n. 1228,213

somm. 1883,447 1883,445
1883,445

0,002

Onde $\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7}(m^2\sqrt[3]{m} + n^2\sqrt[3]{n}) + \frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}(m\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{n^2})$
$- q\sqrt[3]{q}(m + n) = 0.002.$

DIMOSTRAZIONE

Della riducibilità d' ogni quantità immaginaria algebraica alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, *adattata ad un Trattato elementare della natura delle equazioni.*

Del Sig. Sebastiano Canterzani Professore di matematica, e Secretario perpetuo dell' Instituto delle Scienze di Bologna.

1. Il Sig. d' *Alembert* viene riconosciuto per il primo, che abbia dimostrato essere ogni immaginario riducibile alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, dove A, B rappresentano due quantità reali di qualsivoglia forma. Egli ha data questa dimostrazione in una sua Memoria pubblicata tra quelle della Reale Accademia di *Berlino*, che appartengono all' anno 1746. Ma una tale dimostrazione non potrebbe aver luogo in un Trattato elementare della natura delle equazioni. Il Sig. Ab. *Bossut* nella sua Algebra al Cap. XVII dà una dimostrazione assai semplice, la qual vale per gl' immaginarj, che riguardati come valori di un' incognita portano ad equazioni algebraiche. Questa dimostrazione però dipendendo parte da principj, che si trovano sparsi nel citato Capitolo, e parte ancora da qualche principio, che non si dimostra che ne' Capitoli seguenti, non pare che renda inutile del tutto il pensiere di riunire in un sol punto di veduta tutte le proposizioni, che sono necessarie a dedurla, e di farla insieme dipendere dal minor numero di principj, e dai più semplici che sia possibile. Egli è ciò che mi studierò di fare in questo breve scritto, prefiggendomi di formarlo in modo, che possa esser riguardato come parte di un Trattato elementare della natura delle equazioni.

2. E primieramente è noto, che ogni equazione, la quale non abbia tra i coefficienti de' suoi termini veruna quantità

tità immaginaria, ſe ſia di grado diſpari, ha ſicuramente un valore della ſua incognita reale; e ſe ſia di grado pari, ed abbia l' ultimo termine negativo, ha ſicuramente due valori dell' incognita reali, uno poſitivo, ed uno negativo. Queſta verità è di tanta importanza nel preſente argomento, che non fia inutile richiamarne a mente la dimoſtrazione.

E' chiaro, che ogni quantità reale meſſa nell' equazione in luogo dell' incognita fa aſſumere all' equazione un valor reale, il quale non ſarà zero ſe non nel caſo, in cui la quantità reale meſſa in luogo dell' incognita ſia appunto uno de' valori, che può avere l' incognita in quell' equazione. E' chiaro ancora, che mettendo ſucceſſivamente in luogo dell' incognita altre ed altre quantità reali creſcenti, o decreſcenti per gradi minimi, i ſucceſſivi valori reali, che andrà ricevendo l' equazione, varieranno anch' eſſi per gradi minimi; di modo che paſſando gradatamente il valor, che ſi dà all' incognita, dall' eſſer a cagion d' eſempio a ad eſſere b, gradatamente pure paſſerà il valor dell' equazione dall' eſſere quello, che corriſponde al primo valore a dell' incognita, il quale denoterò per A, ad eſſere quello, che corriſponde all' altro valor b dell' incognita, e che denoterò per B. Ora qualunque ſia l' ordine, che tengono i valori reali dell' equazione nel paſſare che fanno dall' A al B, mentre i valori reali dell' incognita paſſano dall' a al b, egli è certo che facendoſi quel paſſaggio gradatamente, e non per ſalti, non potranno far a meno di non trovarſi fra eſſi tutti i valori reali poſſibili intermedj tra A e B. Donde appariſce, che corriſpondendo il valor reale A dell' equazione al valor reale a dell' incognita, e il valor reale B dell' equazione al valor reale b dell' incognita, ogni valore reale dell' equazione intermedia tra A e B dipenderà ſicuramente da un valor reale dell' incognita intermedio tra a e b.

Ciò premeſſo, ſia un' equazione di grado diſpari x^{2n+1} ecc. $= 0$. E' manifeſto che al valor reale $x = \infty$ corriſponde il valor reale dell' equazione ∞^{2n+1}, e che al valor reale $x = -\infty$ corriſponde il valor reale dell' equazione $-\infty^{2n+1}$. Dunque il valor reale zero dell' equazione, il quale è intermedio tra i due reali ∞^{2n+1}, $-\infty^{2n+1}$, dipenderà ſicuramen-

te da un valor reale di x intermedio tra i due ∞, e $-\infty$: Dunque l' equazione di grado diſpari x^{2n+1} ecc. $=0$ ha ſicuramente un valor della ſua incognita x reale.

Sia ora un' equazione di grado pari, che abbia l' ultimo termine negativo $x^{2n} \ldots\ldots - s = 0$. Dato all' incognita il valor reale $x = \infty$, aſſume l' equazione il valor reale ∞^{2n}; dato poi all' incognita il valor reale $x = 0$, aſſume l' equazione il valor reale $-s$. Ma il valor reale zero dell' equazione è intermedio fra ∞^{2n}, e $-s$; dunque dipenderà eſſo ſicuramente da un valore reale dell' incognita intermedio fra ∞, e 0, il quale per conſeguenza ſarà poſitivo. Similmente dato all' incognita il valor reale $x = -\infty$, l' equazione aſſume il valor reale ∞^{2n}, e dato all' incognita il valor $x = 0$, aſſume l' equazione il valor reale $-s$; dunque il valor reale zero dell' equazione, il quale è intermedio fra ∞^{2n}, e $-s$, dipenderà ſicuramente da un valor reale dell' incognita x intermedio fra $-\infty$, e 0, e per conſeguenza negativo. Dunque ogni equazione di grado pari avente l' ultimo termine negativo ha ſicuramente due valori dell' incognita reali, uno poſitivo, e uno negativo.

3. Egli è evidente da tutto ciò, che un' equazione, la quale abbia tutti i valori dell' incognita immaginarj, non può eſſere ſe non un' equazione di grado pari, e avente l' ultimo termine poſitivo. Donde ſegue, che propoſta un' equazione, che abbia i valori dell' incognita parte reali, e parte immaginarj, ſe ſi farà la diviſione dell' equazione pel prodotto di tutte le radici, che naſcono dai valori reali dell' incognita, il quoziente, il quale ſarà il prodotto delle radici nate dai valori immaginarj dell' incognita, dovrà eſſere un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo. Ora a dire di queſta ſpecie d' equazioni conviene aver ricordate prima alcune coſe, che verrò ſubito indicando.

4. In primo luogo ad ogni equazione, a cui ſoddisfaccia il valore $x = C + D\sqrt{(-1)}$, dee ſoddisfar anche il valore $x = C - D\sqrt{(-1)}$, e viceverſa. Infatti dopo d' aver poſto nell' equazione in luogo di x, e delle ſue poteſtà, il binomio $C + D\sqrt{(-1)}$, e le riſpettive di lui poteſtà, non poſſono i termini dell' equazione eliderſi fra loro, e ridurſi a zero, come convien che ſucceda, ſe $C + D\sqrt{(-1)}$ è vera-

mente valor di x, senza che riducansi separatamente a zero elidendosi tra di loro i termini, che contengono $\sqrt{(-1)}$, e riducansi pure separatamente a zero elidendosi tra di loro i termini, che non contengono $\sqrt{(-1)}$, poichè è chiaro che gli uni non possono per modo alcuno elidersi con gli altri. Onde denotando per A la somma de' termini, che non contengono $\sqrt{(-1)}$, e per $B\sqrt{(-1)}$ la somma di quei, che contengono quel radicale, di modo che fatta la sostituzione del binomio $C+D\sqrt{(-1)}$ in luogo di x l' equazione divenga $A+B\sqrt{(-1)}=0$, è evidente che non può verificarsi tale equazione, come si suppone, senza che si abbiano verificate le due $A=0, B\sqrt{(-1)}=0$. Ma messo in luogo di x nell' equazione l' altro binomio $C-D\sqrt{(-1)}$, il valor dell' equazione diventa $A-B\sqrt{(-1)}$, e per supposizione si ha $A=0$, e $B\sqrt{(-1)}=0$, e quindi anche $-B\sqrt{(-1)}=0$. Dunque anche $A-B\sqrt{(-1)}=0$, e però anche il binomio $C-D\sqrt{(-1)}$ adempie la condizione dell' equazione, e così è valore anch' egli dell' incognita. Dunque non può l' equazione aver per valore della sua incognita uno di que' due binomj senza aver anche l' altro.

5. Secondariamente dico, che se a, e b denoteranno due quantità reali, di qualunque forma elle sieno, la prima delle quali può anche supporsi $=0$, la radice di qualsivoglia indice intero, e positivo della quantità $a\pm b\sqrt{(-1)}$, cioè $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}$ sarà sempre una quantità come $p\pm q\sqrt{(-1)}$, cioè della stessa forma che la proposta. Imperciocchè sia primieramente $n=2^r$. Sarà

$\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=\sqrt[2^{r-1}]{\pm\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}}$. Ma generalmente abbiamo $\sqrt{(M\pm N)}=\sqrt{\frac{(M+\sqrt{(M^2-N^2)})}{2}}$ $\pm\sqrt{\frac{(M-\sqrt{(M^2-N^2)})}{2}}$, e però fatta $M=a$, $N=\pm b\sqrt{(-1)}$, si ha $\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=$ $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}\pm\sqrt{\frac{(a-\sqrt{(aa+bb)})}{2}}$, cioè

$$=\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}\pm\sqrt{\frac{(-a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}\sqrt{(-1)};$$

onde denotando per c la quantità reale $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}$;

e per d l' altra quantità reale $\sqrt{\frac{(-a+\sqrt{(aa+bb)})}{2}}$, si avrà $\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=c\pm d\sqrt{(-1)}$. Dunque

$\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=\sqrt[2^{r-1}]{\pm\sqrt{(a\pm b\sqrt{(-1)})}}=$

$\sqrt[2^{r-1}]{\pm(c\pm d\sqrt{(-1)})}$; cioè $\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=$

$\sqrt[2^{r-1}]{c\pm d\sqrt{(-1)}}$, oppure $\sqrt[2^r]{a\pm b\sqrt{(-1)}}=$

$\sqrt[2^{r-1}]{-c\mp d\sqrt{(-1)}}$.

Qualunque si prenda di questi due valori, è sempre vero, che la radice 2^r *esima* della quantità $a\pm b\sqrt{(-1)}$ si riduce alla radice 2^{r-1} *esima* d' una quantità della stessa forma, composta cioè di due parti, una reale affatto, l' altra formata d' una quantità reale moltiplicata per $\sqrt{(-1)}$. Ora è evidente, che quel che si è dimostrato per la radice 2^r *esima*, vale per la 2^{r-1} *esima*, la quale si ridurrà così alla radice 2^{r-2} *esima* d' una quantità della stessa forma, e così via discorrendo: onde finalmente giungerassi ad aver ridotta la radice 2^r *esima* alla radice 2^{r-r} *esima*, cioè ad una quantità sempre della stessa forma, e non più posta sotto verun segno radicale.

Sia ora n un numero dispari. Suppongasi $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=p\pm q\sqrt{(-1)}$: e mutando il segno all' immaginario $\sqrt{(-1)}$, sarà $\sqrt[n]{(a\mp b\sqrt{(-1)})}=p\mp q\sqrt{(-1)}$. Dunque moltiplicando un' equazione per l' altra si avrà $\sqrt[n]{(aa+bb)}=pp+qq$, dove $\sqrt[n]{(aa+bb)}$ è sicuramente quantità reale, com' è evidente. Ma essendo $\sqrt[n]{(a\pm b\sqrt{(-1)})}=p\pm q\sqrt{(-1)}$, sarà anche $a\pm b\sqrt{(-1)}=(p\pm q\sqrt{(-1)})^n$

$$=p^n\pm n.\,p^{n-1}q\sqrt{(-1)}-\frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} p^{n-3} q^3 \sqrt{(-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p^{n-4} q^4$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} p^{n-5} q^5 \sqrt{(-1)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5.6} p^{n-6} q^6 \mp \text{ecc.}$$

la qual equazione dovendo esser identica, converrà che sia

$$p^n - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p^{n-4} q^4$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5.6} p^{n-6} q^6 + \text{ecc.} = a.$$

Or quest' equazione non può contenere che potestà pari di q, come si rende manifesto dall' osservare che le dispari non possono non aver annesso il radicale $\sqrt{(-1)}$, il quale in quest' equazione non può comparire. Dunque essendosi trovato $pp + qq = \sqrt[n]{(aa + bb)}$, e quindi $qq = -pp + \sqrt[n]{(aa + bb)}$, che è quantità reale, e però essendo reali anche tutte le potestà $q^4 = p^4 - 2p^2 \sqrt[n]{(aa + bb)} + \sqrt[n]{((aa + bb)^2)}$,

$q^6 = -p^6 + 3p^4 \sqrt[n]{(aa + bb)} - 3p^2 \sqrt[n]{((aa + bb)^2)} + \sqrt[n]{((aa + bb)^3)}$,

$q^8 =$ ecc., fatte queste sostituzioni nell' equazione trovata

$p^n - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \text{ecc.} - a = 0$ si avrà un' equazione in p del grado n *esimo*, cioè di grado dispari, e avente tutti i coefficienti de' suoi termini reali, la quale per conseguenza (*n.* 2.) avrà sicuramente un valor reale di p. Intendendo per tanto posto questo valor reale, qualunque sia la forma di lui, nell' equazione $qq = -pp + \sqrt[n]{(aa + bb)}$, avrassi il valor di q sotto la forma $\sqrt{(-pp + \sqrt[n]{(aa + bb)})}$, il quale sarà reale, perchè tanto $\sqrt[n]{(aa + bb)}$, quanto p è reale, e non può mai essere $pp > \sqrt[n]{(aa + bb)}$, altrimenti si avrebbe q sotto la forma $\sqrt{(pp - \sqrt[n]{(aa + bb)})} \sqrt{(-1)}$, e quindi $q\sqrt{(-1)}$ sarebbe $= -\sqrt{(pp - \sqrt[n]{(aa + bb)})}$, cioè sarebbe reale, e così l' immaginario $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$, che si è supposto $= p \pm q\sqrt{(-1)}$ sarebbe eguale a una somma di reali, il che è impossibile. Essendo dunque per l' equazione

$\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})} = p \pm q\sqrt{(-1)}$ ſempre ſicuro un valor reale di p, ed eſſendo reale anche il valor corriſpondente di q eſpreſſo per $\sqrt{(-pp + \sqrt[n]{(aa + bb)})}$, reſta dimoſtrato che $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$, anche quando n ſia un numero diſpari, è compreſo ſotto la forma generale $p \pm q\sqrt{(-1)}$, dove p, q denotano quantità reali.

Sia per ultimo n un numero pari, ma non della forma 2^r. Sarà egli della forma $2^r(2m+1)$, denotando r, ed m due numeri intieri poſitivi quali ſi vogliano. E ſiccome è

$\sqrt[2^r(2m+1)]{a \pm b\sqrt{(-1)}} = \sqrt[2^r]{\sqrt[2m+1]{a \pm b\sqrt{(-1)}}}$, e ſi è già or ora veduto, che $\sqrt[2m+1]{a \pm b\sqrt{(-1)}}$ è ſempre compreſo nella forma generale $p \pm q\sqrt{(-1)}$, così potraſſi intender

$\sqrt[2m+1]{a \pm b\sqrt{(-1)}} = p \pm q\sqrt{(-1)}$, con che il radicale propoſto $\sqrt[2^r(2m+1)]{a \pm b\sqrt{(-1)}} = \sqrt[2^r]{\sqrt[2m+1]{a \pm b\sqrt{(-1)}}}$ diventerà

$= \sqrt[2^r]{p \pm q\sqrt{(-1)}}$. Ma ſi vide già eſſere $\sqrt[2^r]{p \pm q\sqrt{(-1)}}$ riducibile ſempre alla ſolita forma $c \pm d\sqrt{(-1)}$. Dunque il radical propoſto, divenuto già $= \sqrt[2^r]{p \pm q\sqrt{(-1)}}$, potrà ſempre intenderſi ridotto anch' egli alla medeſima forma $c \pm d\sqrt{(-1)}$.

Qualunque pertanto ſia l' indice intiero, e poſitivo del radicale, ſotto cui ſi trova una quantità compoſta di due parti, una reale affatto, l' altra conſiſtente nel prodotto d' una reale per l' immaginario $\sqrt{(-1)}$, ſempre può intenderſi il radicale ridotto alla forma ſteſſa della quantità, che ſotto di sè contiene. Se l' indice del radicale ſi voleſſe ſuppor rotto, o negativo, la formola potrebbeſi ſempre trasformar in un' altra, in cui il radicale riuſciſſe coll' indice intiero, e poſitivo.

6. Da tutto ciò ſegue, che una quantità eſpreſſa comunque per radicali, ſotto de' quali ſieno ancora altri radicali, che ab-

bian pur anche sotto di sè altri radicali, e così via discorrendo, quando sotto ognuno, o sotto alcuni di quei radicali siavi una quantità reale moltiplicata o in tutto, o in parte per l' immaginario $\sqrt{(-1)}$, sempre potrà intendersi la proposta quantità ridotta alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$; perciocchè possono per le cose dette intendersi ridotti a questa forma i radicali ultimi più semplici, ridotti i quali si potran di nuovo intender ridotti alla stessa forma i nuovi radicali ultimi più semplici; e ridotti pure questi potran nuovamente intendersi ridotti quei, che dopo la passata riduzione son divenuti ultimi, e più semplici; e così di mano in mano finchè si giunga ad aver per radicali ultimi quei, che da principio eran primi, e più composti, ridotti i quali avrassi la quantità, che era per essi espressa, condotta alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$.

7. Resta da premettere anche una riflessione, ed è questa. Niuna quantità messa in luogo dell' incognita potrà mai ridurre i termini dell' equazione a distruggersi ed elidersi facendo che resti zero, quando non sia ella data, o vogliam dire espressa in qualche maniera per li coefficienti de' termini dell' equazion medesima, la qual cosa è per se stessa chiarissima, essendo evidente, che nell' equazione a cagion d' esempio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ fin tanto che si mettano in luogo di x quantità, che non involvano in niun modo le cognite a, b, c dell' equazione, sarà impossibile ottener la elision de' termini. Donde apparisce, che ogni valore dell' incognita d' un' equazione sarà sempre una quantità, o una formola, qualunque poi siane la forma, espressa in qualche maniera per le quantità cognite, o vogliam dire per li coefficienti de' termini dell' equazione stessa.

8. Premesse tutte queste cose sia ora un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine positivo, $x^{2^r(2m+1)} + \ldots + s = 0$, dove r ed m stanno in luogo di due numeri intieri positivi, de' quali m può anche essere $= 0$. Pongasi $x = y\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$, e avrassi $x^{2^r(2m+1)} = -y^{2^r(2m+1)}$: le altre potestà inferiori della x si troveranno, com' è manifesto, eguali alle corrispondenti potestà della y moltiplicate ciascuna

per una quantità data per $\sqrt{(-1)}$ in modo da poterſi ſempre intender ridotta (*n.* 5.) alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$ denotando A, B quantità reali, delle quali potrà anche per alcuna di quelle poteſta eſſere la $B=0$. Fatte pertanto le ſoſtituzioni in luogo di x, e delle ſue poteſtà, riſulterà un' equazione in y dello ſteſſo grado che la propoſta, la qual equazione avrà il primo termine negativo, cioè $-y^{2^r(2m+1)}$, l' ultimo poſitivo, cioè $+s$, e tutti gli altri moltiplicati o per una quantità reale, o per una immaginaria bensì, ma però tale da poter eſſer inteſa ſempre ridotta alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. A rendere poſitivo il primo ſi muteranno i ſegni di tutti i termini di queſt' equazione, con che riuſcirà negativo l' ultimo termine, il quale diventerà $-s$; a togliere poi l' aſpetto d' immaginarietà ſi ſoſtituirà in ciaſcun de' termini, che ne ſono affetti, in luogo del coefficiente una ſpecie, come α nel ſecondo termine, β nel terzo, γ nel quarto, ecc. L' equazione in y così ridotta, eſſendo di grado pari, ed avendo negativo l' ultimo termine, avrà ſicuramente (*n.* 2.) due valori dell' incognita y reali, e queſti (*n.* 7.) dati per le quantità cognite reali nell' equazione medeſima, tra le quali ſarà la quantità s, e per le ſpecie α, β, γ, ecc. Reſtituendo in queſti due valori di y in luogo delle ſpecie α, β, γ, ecc. le quantità, alle quali erano eſſe ſtate ſoſtituite, le quali quantità ſono tutte della forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, diverrà ognun di loro una quantità data per s, e per li coefficienti dell' equazion propoſta, involuti alcuni di queſti in formole della forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. Ognun dunque di quei due valori di y potrà intenderſi ridotto (*n.* 6.) anch' egli alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$. Ora moltiplicando ciaſcun di loro per $\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$ diverrà egli valore di $y\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$, cioè di x. Avrà pertanto l' equazione propoſta ſicuramente due valori di x, ciaſcuno della forma

$(A \pm B\sqrt{(-1)})\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$. Ma $\sqrt[2^r(2m+1)]{-1}$ ſi riduce ſempre (*n.* 5.)

($n.5.$) alla ſorma $a \pm b\sqrt{(-1)}$. Dunque l' equazione di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo avrà ſicuramente due valori dell' incognita tali, che ciaſcun di loro sarà compreſo ſotto la forma $(A \pm B\sqrt{(-1)})(a \pm b\sqrt{(-1)})$, cioè $Aa - bB \pm (Ab + aB)\sqrt{(-1)}$, oppure $Aa + bB \mp (Aa - aB)\sqrt{(-1)}$, cioè (facendo $Aa \mp bB = M$, e $Aa \pm aB = N$) ſotto la forma $M \pm N\sqrt{(-1)}$, nella quale potrebbe la quantità denotata per N riuſcire $= 0$, e in tal caſo il valore ſarebbe reale.

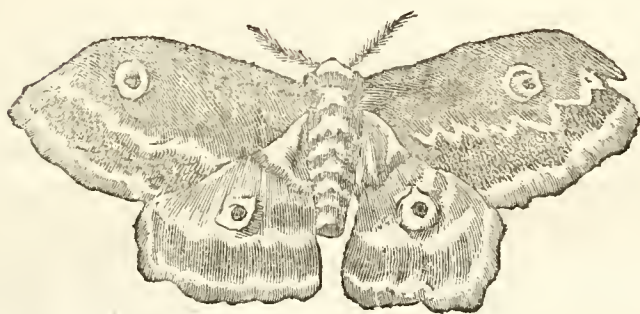
9. Raccogliendo inſieme le coſe fin qui dette ſi può conchiudere 1°. che data un' equazione reale, cioè tale, che tutti i coefficienti de' termini ſieno quantità reali, di qualunque grado ella ſiaſi, e diviſala pel prodotto di tutte le radici, che naſcono dai valori reali dell' incognita per ottenere così nel quoziente il prodotto di tutte le radici, che naſcono dai valori dell' incognita immaginarj, ſi giungerà ad un' equazione reale di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo ($n.3.$); 2°. che queſt' equazione, la quale già per ſuppoſizione non ha verun valore dell' incognita reale, ne avrà ſicuramente ($n.8.$) due immaginarj, ciaſcun de' quali ſarà contenuto ſotto la forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$; 3°. che non potendo ($n.4.$) convenire all' incognita d' un' equazione il valore $a + b\sqrt{(-1)}$ ſenza che le convenga inſieme il valore $a - b\sqrt{(-1)}$, e viceverſa, ed eſſendo il prodotto di $x - a - b\sqrt{(-1)}$ in $x - a + b\sqrt{(-1)}$, che ſono le due radici nate da que' due valori, una quantità reale, cioè $xx - 2ax + aa + bb$, diviſa l' equazione per queſto prodotto ſi otterrà una nuova equazione reale di grado pari avente l' ultimo termine poſitivo; 4°. che ripetendo per queſt' equazione il diſcorſo fatto per la precedente, e così di mano in mano, reſta evidente che non vi può eſſere valor alcuno immaginario dell' incognita, che non ſia compreſo ſotto la ſolita forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$.

10. Siccome ogni quantità algebraica immaginaria, ſia pur ella in qualſivoglia modo compoſta, meſſa $= x$ colle ordinarie operazioni dell' algoritmo, e principalmente coll' inalzamento dell' una e dell' altra parte dell' eguaglianza a congrue poteſtà, arriva finalmente a ſomminiſtrare un' equazione reale, la quale avrà ſempre tutti i valori immaginarj della x compreſi ($n.9.$) ſotto la forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$; e ſiccome

è evidente doversi tra i valori immaginarj della x di quest' equazione trovare la quantità algebraica immaginaria da principio proposta; così resta dimostrato, che ogni quantità algebraica immaginaria viene sempre compresa sotto quella forma $A \pm B \sqrt{(-1)}$, dove A, e B rappresentano due quantità reali.

11. L' esposta dimostrazione ha il vantaggio di far vedere, che per ogni equazione sono sempre possibili tra reali, e immaginarie tante formole date per li coefficienti dell' equazione medesima, quant' è il suo grado, ognuna delle quali posta in luogo dell' incognita verifichi la condizione facendo che i termini dell' equazione si elidano tra di loro, e riducasi la loro somma a zero. Questa verità si suole ordinariamente assumere dagli Autori: pure per un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine positivo chi ne assicura che debba pur esservi una formola, se non reale, almeno immaginaria data per le cognite dell' equazione, che posta in luogo dell' incognita faccia svanir i termini? Il Sig. *Eulero* in una sua Memoria pubblicata nel 1749 tra quelle della Real Accademia di *Berlino* ha data, è vero, una dimostrazione di questa verità; ma oltrechè non sarebbe essa molto adattata ad un trattato elementare della natura delle equazioni, è poi anche soggetta ad alcune difficoltà rilevate dal Sig. Cav. *Daviet* de Foncenex in una Memoria inserita nel primo Tomo de' Miscellanei della Società di Torino. Dall' altra parte la dimostrazione sostituita da questo Autore a quella del Sig. *Eulero*, quanto è ingegnosa, ci sembra altrettanto superiore ancor essa alla portata di un trattato elementare.

12. Non mi estendo a dimostrar la riducibilità anche delle quantità trascendenti immaginarie alla forma $A \pm B \sqrt{(-1)}$, per non uscir dal confine, che in questo scritto mi son prefisso, tanto più che ella è questa una parte, che si trova già con molta semplicità ed eleganza trattata e dal Sig. Cav. *Daviet* de Foncenex nella citata Memoria, e dal celebre nostro P. Gregorio *Fontana* in una dotta dissertazione inserita nel Tomo primo delle Memorie della Società Italiana. Del resto quando uno dimostri, come questi Autori fanno, indipendentemente dal calcolo infinitesimale che $(a \pm b \sqrt{(-1)})^{p \pm q \sqrt{(-1)}}$ si comprende nella forma

$A \pm B\sqrt{(-1)}$, viene insieme a dimostrare la proposizione, che qui si è esposta al n. 5, giacchè $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$ inchiudesi in $(a \pm b\sqrt{(-1)})^{p \pm q\sqrt{(-1)}}$ supponendo $q = 0$. Ma si è creduto di dover trattare a parte la formola $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{(-1)})}$ a fine di non aver per necessità da ricorrere al calcolo delle quantità circolari, e logaritmiche, da cui nel caso qui contemplato si poteva prescindere

SAGGIO

DI OSSERVAZIONI ANATOMICHE

Intorno agli organi della respirazione degli uccelli.

Del Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia naturale, e Professore primario della medesima e di Notomia.

Al Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesi e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino.

L'Esposizione vostra anatomica intorno all' encefalo degli uccelli, che voi con gentile sorpresa, e con troppo obbliganti espressioni avete voluto dirigermi, m' invita, e m' obbliga doppiamente ad indirizzare a voi questa mia Memoria, e perchè veggiate quanto mi stiano a cuore i sentimenti vostri di urbanità ripieni e di cortesia, e perchè ancora conosciate in qual pregio io tenga la vasta estensione delle cognizioni vostre, e particolarmente anatomiche, le quali hanno saputo a tutta ragione conciliarvi la pubblica estimazione d' uomini per onestà e sapere ragguardevolissimi, e segnatamente d' uno dei più celebri filosofi, e naturalisti che viva Carlo *Bonnet*, e dell' immortale *Allero* anatomico e fisiologo insigne, la cui memoria sarà non meno ai posteri, che ai viventi oggetto sempre di rispetto e di ammirazione. Nè meno certamente dovevate voi aspettarvi dalla pubblicazione dell' opere vostre, le quali voi avete voluto cortesemente favorirmi, poichè in esse si scorge per tutto il sollecito ed attento osservatore, il quale guidato a mano da una sana filosofia non osserva confusamente, e non iscrive per ostentazione, ma tutto esattamente ponderando proccura di estendere per quanto possibil sia i limiti delle nostre cognizioni, come ne porge

ben chiara prova la vostra Encefalotomia universale. Questa tra le altre opere che pubblicate avete, e particolarmente l' Esposizione intorno agli uccelli, e quello che state tuttora scrivendo di questi chiama a sè, quand' anche altri motivi non vi fossero, queste mie osservazioni, che riguardano il soggetto medesimo, sebbene in organi differenti, essendo il principale scopo di queste le parti alla respirazione inservienti, ed il mirabile gioco dell' aria che in questo genere di viventi particolarmente si osserva. Se voi dunque le leggerete, se me ne direte il sentimento vostro, quand' anche le osservazioni vostre fossero alle mie contrarie, io ve ne averò sempre obbligo particolare, come lo averò a chiunque far ciò volesse con quelle maniere però che ad onesta e gentile persona convengono.

Non è certamente nuovo che gli uccelli abbiano gli organi della respirazione a differenza degli altri animali in modo particolare costruiti. Questa differenza però, per quanto io mi sappia, non è per anche stata riguardata con quella esattezza che un simile interessante argomento sembrava meritare, e se si eccettui il celebre Sig. Gian *Huntero*, il quale fino dal 1774 nelle Transazioni Filosofiche ha fatto prima di tutti accuratamente osservare che l' aria nei volatili dai polmoni e dalle vesciche aeree passa ancora nell' ossa, dando per altro di questo ammirabile fenomeno più un' idea generale che particolare e precisa, tutto rimane ancora nell' embrione di prima, e le descrizioni che ne abbiamo o sono di molto imperfette, o desunte piuttosto da una fervida immaginazione, che da vere ed esatte osservazioni.

Questo difetto, s' io mal non m' appongo, egli è nato non solo dalla somma difficultà che s' incontra nel notomizzare negli uccelli gli organi della respirazione, ma ancora dalle varietà che si veggono negli organi medesimi; poichè non solo nei differenti generi si riscontrano delle diversità rimarcabili, ma ben anche negli uccelli della specie medesima, e non di raro mi è avvenuto di vedere che nell' uccello istesso le vesciche aeree della destra parte non erano nè per la struttura nè pel numero a quelle della sinistra corrispondenti. E quello che diciamo di queste convien pur ripeterlo ancora di quella parte che chiamano laringe interna, poichè in alcuni uc-

celli è di craſſi muſcoli fornita, in altri n' è ſenza affatto; membranoſa ſi vede in alcuni, in altri cartilaginoſa, oſſea in altri; in cert'uni poi è contratta aſſai, in altri meno, e finalmente in diverſi non poco dilatata. Siccome però il deſcrivere tutte queſte varietà ſarebbe troppo lungo e ſpiacevole ancora, così voglio prima d'ogn'altro avvertito ch'io non darò che le diverſità maggiori e più notabili che mi ſarà avvenuto di vedere in quegli uccelli che furono da me oſſervati.

La trachea, o aſpra arteria che negli uccelli è più o meno lunga a miſura che gli uccelli hanno il collo più lungo o più breve, è un ampio canale che partendoſi dalla parte poſterior della bocca diſcende per tutta la lunghezza del collo, entra nella cavità del torace, e nei polmoni per cui l' aria paſſa alle parti interne, ed eſce liberamente. Queſta viene diſtinta in tre differenti parti, cioè in capo, tronco, e rami. Il capo che diceſi comunemente laringe è la parte ſuperior della ſteſſa, ed è coſtituita dietro la parte poſterior della lingua. La ſtruttura di queſta diſſe l' *Hallero* eſſer ſimile, oppure analoga a quella dell' uomo, e certo ſe ſi eccettuino alcune differenze che ſembrano rimarcabili, tra loro paſſa una grandiſſima analogia. Gli anatomici hanno negli uccelli conſiderate quattro cartilagini, cioè la cricoide, due aritenoidee, e la ſcutiforme; non pare però difficile il dimoſtrare ſe non l'epiglottide, almen altro ſimile che a queſta corriſponda.

La cartilagine cricoide o annulare che nell' uomo s' alza poſteriormente e ſi contrae anteriormente, negli uccelli è all' oppoſto dilatata all'innanzi, e contratta all'indietro, anzi ivi facendoſi oſſea produce internamente, e nel mezzo una picciola prominenza o ſia tubercolo che corriſponde rettamente alla feſſura ſuperior della glottide. A queſta picciola prominenza con mobile articolo ſi congiungono due picciole cartilagini che dalla loro ſede corriſpondono alle cartilagini aritenoidee deſtra e ſiniſtra.

Queſte cartilagini oſſee hanno due proceſſi, l'uno dei quali è ſuperiore, inferior l'altro. Queſto ſcorrendo ſopra il margine laterale della cartilagine cricoide va a congiungerſi anteriormente con la cricoide medeſima, il ſuperiore producendoſi innanzi inclinato a vicenda da entrambi i lati interna-

mente, col mezzo di allungati e mobili legamenti ſi uniſce con l'apice della cartilagine ſcutiforme. Queſti proceſſi ſono in tal maniera coſtituiti, e così con gl'inferiori diſpoſti che comprendendo tra loro un leggier ſolco rappreſentano i legamenti della glottide, e la figura della glottide medeſima.

La cartilagine ſcutiforme, che pur negli uccelli è oſſea, è come compoſta di due oſſetti, ma in così fatta maniera congiunti che moſtrano la figura di due triangoli equilateri, i vertici dei quali convengono inſieme. Queſta cartilagine benchè poſſa a taluno ſembrare un'addizione della cartilagine annulare, od anche, non ſenza ragione, una porzione fatta oſſea della ſteſſa cartilagine, pure ſiccome è manifeſta e diſtinta aſſai maſſime nelle laringi eſſiccate, pare ſtrano che il *Caſſerio* Anatomico diligentiſſimo non l' abbia almeno indicata, e particolarmente nei galli d' india, dei quali dà la figura, poichè in queſti è così coſpicua che internamente ancora ha un leggiero tubercolo che direttamente corriſponde alla prominenza interna della cartilagine annulare.

Rimane infine la cartilagine epiglottide qualora creder ſi voglia la laringe degli uccelli corriſpondente a quella dell' uomo. Queſta cartilagine ſebbene diſtinta non ſi vegga, nè tale ſia effettivamente, pure al diſopra della cartilagine ſcutiforme evvi un proceſſo che il *Caſſerio* chiamò proceſſo digitato della cartilagine annulare. Quantunque però queſto proceſſo ſia coſtituito in maniera che in vece di coprir la glottide ſia tutto all' oppoſto roveſciato allo innanzi, e riguardi con l' ottuſo apice la lingua, ſembra ciò nonoſtante eſſer creato in maniera, onde preſtar poſſa l' offizio della epiglottide iſteſſa. Si produce queſto nell' intervallo che paſſa fra la glottide e la lingua, ed è poſto in modo che può alla medeſima accoſtarſi e rimoverſi ſecondo il biſogno. Quindi nella deglutizione degli alimenti portandoſi indietro la lingua, ed inalzandoſi la laringe, ne avviene che duplicata al diſopra del proceſſo la membrana che copre il proceſſo medeſimo, rialzandoſi, anche mercè d' una lunga cartilagine, che a guiſa di leva dalla baſe dell' oſſo joide ſotto al proceſſo diſcende, faciliti alla membrana ſuddetta lo ſcorrere, e diſcendere poſteriormente ſopra la glottide, onde a guiſa di valvula chiuda l' ingreſſo nella laringe agli alimenti che di-

ſcendono nell' eſofago, compiendo così mirabilmente l' uffizio dell' epiglottide ſteſſa.

Finalmente alla laringe degli uccelli non mancano i muſcoli crico-aritenoidei dilatatori della glottide, nati dalla parte poſteriore della cartilagine cricoide, ed inſeriti nei proceſſi delle cartilagini aritenoidee, nè mancano ancora gli jotiroidei elevatori della laringe nati dalla baſe dell' oſſo joide, ed inſeriti ai lati della cartilagine ſcutiforme, come maniſeſti anco ſono gli ſterno-tiroidei depreſſori, i quali nati dallo ſterno, ed inſeriti nella parte inferiore dell' aſpra arteria aſcendono lateralmente ſempre aderenti all' arteria medeſima, ed hanno fine ai lati della cartilagine ſcutiforme. Da tutto queſto ſembra poterſi credere con l' *Hallero* eſſere la laringe degli uccelli ſimile o almeno analoga a quella dell' uomo, e per conſeguenza influir eſſa pure nella varia modulazion delle voci.

Dalla laringe diſcende un lungo canale, che è il tronco dell' aſpra arteria compoſta di perfetti anelli cartilaginoſi, il numero dei quali varia ſecondo la maggiore o minore lunghezza del canale medeſimo. Queſti ſono inſieme uniti da una membrana che diſcende dalla cartilagine annulare per tutta la lunghezza della trachea, la quale penetra nella cavità del torace, e termina verſo la quarta vertebra dello ſteſſo.

Queſta mercè della membrana frappoſta agli anelli ſi allunga, e ſi contrae per mezzo dei muſcoli già deſcritti. Il diametro di queſto canale non è ſempre lo ſteſſo, più ſpazioſo d' ordinario ſi vede nel principio, indi inſenſibilmente ſi contrae conſervando ſempre la ſua figura, la quale in altri è circolare, in altri ellittica. Giunto verſo il fine ſi fa più riſtretto, gli anelli ſi accoſtano più tra loro, perdono la loro figura facendoſi più ſchiacciati, indi termina in un' allungata membrana piana e quaſi contigua da entrambi i lati, da cui hanno origine i bronchi. Queſta particolare ſtruttura è quella che chiamano laringe interna, e che vien riputata l' organo principal della voce. Queſta ſtruttura però, che tale è appunto quale abbiamo deſcritta nei gallinacei, non è ſempre la ſteſſa negli altri uccelli, poichè per eſempio nelle cicogne, e più ancor nei colombi la maggior latitudine della trachea è appunto nel fine, ove anche gli anelli più ſi ſco-

si scostano fra loro, e la frapposta membrana si fa più spaziosa. Da questa latitudine si può egli dedurre quella bassa voce, e profonda che costantemente hanno i colombi? All'incontro debbonsi forse ripetere le acute e sonore dei cardellini, canarini, ussignuoli da un picciolo globo cartilaginoso, a cui sono aderenti piccioli muscoli, ed in cui termina la trachea, e principiano i bronchi? Certamente qui non vi sono le membranose linguette che nei gallinacei abbiamo vedute, e che si annoverano tra gli organi principali della voce.

Questa varietà di struttura più mirabile ancora si mostra nei corvi, e nei papagalli. I corvi nel fine della trachea, che vedesi senza alcuna contrazione, hanno quattro elegantissimi muscoli due anteriori, e due posteriori, che tutti a guisa di piramidi costituiti ascendendo attaccati alla trachea, vanno estenuati insensibilmente a perdersi verso il decimo anello degli ascendenti della trachea stessa. All' opposto i papagalli nel luogo medesimo hanno due muscoli, uno per ciascun lato posti lateralmente, i quali, come in tre divisi, rappresentano la graziosa figura di un giglio rovesciato, le cui parti laterali vanno a terminare nell' estremità di due lamine ossee semilunari e quasi contigue, che compongono il fine ristretto della trachea; quella di mezzo poi discendendo incurvata si va ad inserire nella parte convessa dei bronchi poco al disotto del loro principio. Questi muscoli come servono a contrarre la trachea ed i bronchi, influirebbero nelle forti e clamorose lor voci?

Egli è certo che questa inferiore struttura della trachea ove principiano i bronchi, comunque costituita, è cagione della principale formazion della voce negli uccelli. Noi più volte abbiamo recisa ad alcuni di questi, viventi ancora, la parte superiore della trachea due dita in circa al disotto della laringe, ed abbiamo da questi ottenute quasi le voci medesime, come se loro l' aspra arteria recisa non fosse. Quindi in quegli uccelli ne' quali l' estremità di questo canale è conformato molto diversamente da ciò che fu detto, come nelle anitre maschi, nei quali in vece di restringimento, o di linguette membranose, oppure di muscoli, evvi una grande vescica ossea, la loro voce è rauca assai e molto dimessa; laddove nelle femmine che hanno un tubo osseo e ristretto, in-

feriormente diviſo in due , da cui hanno origine i bronchi, le loro clamoroſe voci e penetranti aſſordano ed inquietano ſommamente.

Ove termina l'aſpra arteria ivi cominciano i bronchi, che ſono i due ſuoi rami deſtro e ſiniſtro , per mezzo dei quali l' aria paſſa dalla trachea nei polmoni. La ſtruttura di queſti è corriſpondente a quella del tronco , con queſta differenza però che gli anelli qui ſono imperfetti, e rappreſentano tanti ſemicircoli , che tengono la parte eſteriore dei bronchi, mentre la parte interna è ſoltanto membranoſa . Queſti bronchi divaricati a vicenda , ed in alcuni uccelli ſuperiormente uniti da un traſverſale legamento, entrano nel polmone da entrambi i lati, indi in più rami e ſpazioſi diviſi comunicano l' aria a tutto il polmone . In queſti rami , e ſegnatamente ne' maggiori, ſi veggono delle membranette tranſverſali aſcendenti che occupano la metà del lume dei rami medeſimi . Queſte membranette , per quanto dimoſtra la più ſcrupoloſa oſſervazione, ad altro non ſembrano eſſer fatte che per diriger l' aria per diverſe e particolari vie , dappoichè fra ognuno degli interſtizj, o vogliam dire delle cellette evvi il ſuo libero ed aperto pertugio che riceve l' aria , e la traſporta ad alcuni determinati condotti fuori del polmone coſtituiti . La natura, che nelle ſue operazioni tanto è più mirabile quanto più ſemplice, non ſembra aver già coſtrutte queſte membranette perchè concorreſſero alla formazion della voce, come è opinione d'alcuni illuſtri e celebri autori; poichè non pare molto ragionevole che la voce abbia a formarſi nella cavità dei polmoni e dei bronchi, eſſendo la laringe interna ed eſterna per ſe medeſime ſufficienti a produrla.

I polmoni, che ſi aprono in larghe e ſpazioſe celle, occupano nel torace quello ſpazio che è tra la prima e la ſettima coſta . Queſti non ſono già liberi come nei quadrupedi, ma ſi ritrovano aderenti alle vertebre del torace, alle coſte, ed ai muſcoli intercoſtali. Non ſono per tutto circondati dalla pleura ; quindi l' aria eſce da loro liberamente , e paſſa ad altre cavità, delle quali in ſeguito parleremo . Diſſi che non ſono per tutto circondati dalla pleura, poichè queſta aſcendendo dalle parti laterali delle coſte, e ſtendendoſi ſovra

di essi non copre che la parte loro anteriore e concava, e sta ad essi irregolarmente aderente. Da ciò ne avviene che lascia in alcune parti sotto di essa libero l' egresso e l' ingresso dell' aria, ed in alcuni luoghi trovandosi ancora pertugiata ed aderente al polmone, dà alla medesima un facile e pronto passaggio. Questa membrana, per cui scorrono alcuni fascetti di fibre muscolari che vengono dalle vicine coste, è stata chiamata dal celebre *Huntero* il diafragma degli uccelli, *perchè scema la concavità dei polmoni verso l' abdome, e perchè concorre a dilatar le celle dell' aria*, il che certamente convenendo in parte coll' uso del diafragma merita che vi si abbia particolar riflessione. Io però niente togliendo a questo, sebbene altro non sembri essere che la pleura irregolarmente al polmone aderente, mi farò lecito di accennare un' altra membrana, a cui, se non sono di gran lunga ingannato, sembra che possa più adeguatamente convenire il nome e l' uso del diafragma. Questa, che costantemente si vede, è una membrana tra il pericardio ed il fegato costituita, la quale discendendo anteriormente va a congiungersi verso la parte inferiore dell' osso dello sterno, lateralmente con le coste, posteriormente con queste, con la spina, e con la parte superiore delle ossa della pelvi, circoscrivendo così le due cavità del torace e del ventre. Che questo sia il vero diafragma lo persuade 1.° l' attacco superiormente del pericardio con questa membrana, inferiormente col legamento sospensorio del fegato: 2.° le fibre carnose che in alcuni uccelli, come nei corvi, carnose si veggono scorrere per la stessa: 3.° la posizion sua che corrisponde a quella degli altri animali, e finalmente l' azione di questo sopra i visceri del ventre.

Questo diafragma, sebbene nell' espirazione ascenda e nell' inspirazione discenda, pure non giunge mai a toccare i polmoni, i quali, come fu detto, sono aderenti alla parte superior del torace. Questa nei volatili particolar adesione dei polmoni è una di quelle mirabili produzioni, delle quali la Divina Increata Sapienza ha voluto provvedere con singolar magistero gli abitatori dell' aria, onde nulla alle complicate e varie di loro azioni mancar potesse. E di fatto siccome l' aria nei quadrupedi si diffonde soltanto nei polmoni, così nei volatili passando liberamente da questi a molte altre cavità,

non solo nelle parti molli, ma nelle ossa eziandio costituite; era di necessità assoluta che fermi fossero onde potere a queste per gli opportuni e pronti meati comunicar l' aria liberamente. Ora quali siano queste cavità, come e dove disposte, quali i meati dell' aria, fa d' uopo considerare.

Queste aeree cavità, oppur ricettacoli, o come chiamano comunemente vesciche, che sparse sono pel corpo degli uccelli, e che per vie particolari comunicano tutte immediatamente o mediatamente coi polmoni, sono fatte di una membrana trasparente e tenace, che differisce di molto da quelle della tunica cellulare, e sono in numero, figura, e capacità varie e ben differenti tra loro. Altre di queste si veggono nelle cavità del torace, altre nelle parti laterali di questo, altre nel collo, altre finalmente nel ventre.

Nel torace il quale ordinariamente si vede in due cavità laterali diviso destra e sinistra da una o più membrane, che figurano il mediastino, vi si riscontrano d' ordinario in ogni lato due ampie vesciche, la superiore delle quali alcuna volta è maggiore, tal' altra minore, ed in alcuni uccelli se ne veggono tre, e queste ultime poste ai lati del pericardio sotto allo sterno e molto minori, le quali però non vi sono sempre, nè da entrambi i lati costanti. La parte suprema poi del torace sotto all' osso lunare è tutta cava chiusa anteriormente da una ben distesa membrana simile alle descritte, la quale occupa tutto lo spazio che è fra le gambe del detto osso, e che discende fino alle clavicole. Questa spaziosa cavità aerea serve di comunicazione a molte altre minori laterali vesciche, che si veggono fuori della cavità del torace.

Queste laterali vesciche sono tre fra i muscoli, ed alla articolazione dell' omero mirabilmente distribuite. Queste si distinguono in superiori, medie, ed inferiori. Le superiori sono poste longitudinalmente sotto la scapula tra le coste e i muscoli intercostali, e subscapulari: le medie sono fatte a guisa di borsa tra l' estremità del muscolo pettorale maggiore e minore: le inferiori e minori dell' altre sono costituite sotto le medie, e corrispondono segnatamente al capo dell' omero. Oltre queste tre laterali vesciche ve n' è una quarta posta all' estremità della clavicola, e dell' osso lunare, che all' articolazione di quest' ossa corrisponde.

Nel collo si veggono ordinariamente due allungate vesciche una per ciascun lato che ascendono aderenti ai processi trasversi, ed ai lati delle vertebre, le quali in molti uccelli terminano verso la quarta o quinta vertebra delle ascendenti.

Nel ventre finalmente più vesciche vi sono, due delle quali sono costantemente maggiori l' una a sinistra, e l' altra a destra, e questa quasi sempre maggiore della sinistra, poichè nella parte inferiore ed estrema del ventre passa nella parte opposta in vicinanza, e quasi a contatto della sinistra. Queste vesciche da entrambi i lati discendono dal diafragma, e comprendono fra loro uno spazio che contiene il segato, ed il ventriglio, in cui non entra mai aria. Oltre le due aeree cavità accennate altre ve ne sono aderenti alle ossa della pelvi, altre che discendono, e si cacciano tra gl' intestini per modo che tutto il ventre a riserva dello spazio descritto si può dire investito dall' aria e ripieno. Ora posta l' enumerazione di queste vesciche non andrebbe egli ingannato di molto chi volesse asserire su l' altrui autorità che dieci sono soltanto, cioè otto nel petto, e due nel ventre?

Tutte queste aeree cavità ricevono aria dai polmoni, che sono come centro comune di tutte. Nella superiore e laterale del torace entra l' aria per un foro, che si vede nel polmone e nella membrana che lo copre in vicinanza ai vasi che dal cuore penetrano nel polmone, e così nell' inferiore per un foro simile, ma maggiore, che è manifesto verso la metà della parte cava dei polmoni, ed in alcuni uccelli come nei colombi, galli, pernici, quaglie ecc. per un' apertura tra la membrana che copre il polmone e le coste, e nella suprema del torace per due spaziosi fori che si veggono tra l' esofago ed i bronchi, e che derivano dalla parte anteriore e superiore dei polmoni. Questa grande cavità poi è come un atrio da cui prendono aria le contigue laterali vesciche.

Alle superiori penetra per un' ampia bocca, e che costituisce quasi con la suprema una medesima cavità, che si vede al disopra dei vasi e nervi alari: alle medie per una larga fessura posta tra la cavicola e il muscolo subclavio; alle inferiori per un picciolo foro posto verso la estremità interna

del muſcolo ſubclavio; alla quarta finalmente per un'apertura che ſi vede verſo la eſtrema parte della clavicola ove ſi congiunge con l' omero.

I polmoni che ſuperiormente ſi aprono in iſpazioſe celle mandano aria alle laterali del collo per due vie, che ſi ſcorgono nelle cavità ſuperiori e laterali del torace, e che ſcorrono ſopra i bronchi, e vaſi polmonari.

Le veſciche finalmente del ventre ſono dai polmoni abbondantemente corredate d' aria per due ſpazioſe aperture che hanno inferiormente, e che corriſpondono con altre ſimili che ſi veggono tra la parte poſteriore del diafragma e il lembo ſuperiore delle oſſa della pelvi.

Le oſſa non meno che le parti molli ſono negli uccelli d' aria ſuſcettibili. Non tutte però lo ſono egualmente; poichè quelle che ammettono aria ſono più leggieri e più bianche delle altre, ed hanno le celle oſſee interamente, o per la maggior parte vuote. Nei corvi, nelle pernici, nelle cicogne ecc. l' aria paſſa ſpeditamente nelle oſſa della teſta, in quelle della ſpina, nell' oſſo lunare, nelle ſcapule, nelle clavicole, negli omeri, nelle coſte, nello ſterno, nelle oſſa della pelvi, ed in quelle dell' oſſo ſacro. Allo incontro in quelli che furono da me cimentati il femore, le gambe, le oſſa del piede, e così il raggio, e l' ulna, e quelle che corriſpondono nei quadrupedi alle oſſa del carpo, e metacarpo la eſcludono intieramente, giacchè le celle di queſti oſſi ſono ripiene tutte, o in gran parte di midollo o di ſoſtanza ſanguigna. Nè ſolo queſt' oſſa eſcludono l'aria, ma nei galli, nelle quaglie ecc. l' aria non entra che per l' oſſo dell' omero, e della clavicola, ed in alcuni dell' omero ſoltanto. Ora veggiamo quali ſiano i meati pe' quali l'aria s' infonde nelle oſſa accennate.

Nelle oſſa della teſta aſcende l' aria per la tromba euſtachiana, e quindi dal timpano ſi diffonde per le ſpazioſe celle, o ſia pel meditullio di tutte le oſſa, che pur voi nella voſtra eſpoſizione dell' encefalo degli uccelli avete notato eſſere un teſſuto molto ſpugnoſo, ed abbondante. Nei corvi evvi coſa che merita particolarmente di eſſere ricordata. Oltre le cellette che ſi veggono fra le due lamine componenti le oſſa del cranio al diſotto della ſeconda lamina diſcendono

infinite rette fibre, che a guiſa di tante colonnette ſi vanno ad unire ad una terza lamina oſſea ſottiliſſima traſparente, che copre la dura madre, laſciando tra queſta e la ſeconda uno ſpazio incirca d' una linea parigina, il quale viene dall' aria intieramente ripieno.

I polmoni, che come fu detto ſono colla parte loro conveſſa e poſteriore aderenti alla ſpina ed alle coſte, comunicano immediatamente l' aria per alcuni forellini, che ſi veggono ai lati delle vertebre del torace non ſolo ai corpi delle vertebre ſteſſe, ed ai proceſſi delle medeſime, ma paſſa ancora nel tubo ſpinale.

Inutilmente poi ſi cercherebbero nei corvi i paſſaggi dell' aria nell' eſtremità che riguardano il corpo dell' uccello nelle clavicole, nelle ſcapule, e nell' oſſo lunare, poichè in queſti ſi veggono nella parte oppoſta, ove queſt' oſſa ſi articolano fra loro: ordinariamente però, e nelle clavicole in particolare, ſervono a queſt' uſo alcuni piccioli rotondi orifizj, che ſi ſcorgono nella eſtrema interna parte di queſt' oſſo, ove allo ſterno ſi congiunge.

Perchè poi l' aria liberamente paſſaſſe nell' omero, pare che la natura vi abbia poſto un particolare artifizio. Preſſo al capo di queſt' oſſo nella parte ſua inferiore vi ſi ſcorge un ſeno profondo, e quaſi circolare che ſembra fatto appunto per raccoglier l' aria dalle inferiori laterali veſciche, alle quali diametralmente riſponde, e per indi tradurla per un foro poſto nella parte inferiore del ſeno in tutta l' interna cavità dell' oſſo medeſimo.

E' già noto che negli uccelli vi ſi veggono da ogni lato due ſerie di coſte, cioè le ſuperiori, e le inferiori. Le ſuperiori ricevono aria dai polmoni nelle loro eſtremità, ove ſi articolano con le vertebre; all' oppoſto le inferiori ove ſi congiungono collo ſterno, e queſto per alcuni forellini, che ſono tra gl' interſtizj delle articolazioni con le coſte, oppure per alcuni ſpazioſi fori poſti in queſt' oſſo nella parte interna e ſuperiore.

Il paſſaggio finalmente dell' aria nelle oſſa della pelvi è nella parte interna delle oſſa medeſime in quel luogo che riguarda le reni, e nell' oſſo ſacro per alcuni forellini poſti ai lati delle vertebre componenti l' oſſo ſteſſo, e che corri-

ſpondono ad alcune veſcichette, che comunicano con le contigue del ventre.

Ecco come l' aria paſſa dalla laringe e dai polmoni alle oſſa, ed alle veſciche tutte del torace e del ventre, e come tutte queſte rimangono dall' aria riempiute e diſteſe. Sebbene però nel dar aria artifiziofamente alla trachea tutte ad un tempo e le veſciche del torace e quelle del ventre ſi gonfino inſieme, e tutte ricevano aria nel tempo medeſimo, pure nell' animal vivente ſi vede ad evidenza che nell' inſpirazione ſi diſtendono quelle del torace, e ſi contraggono quelle del ventre, e così a vicenda nell' eſpirazione ſi diſtendono queſte, e ſi contraggono quelle, rattenendoſi ſempre in queſta maniera una porzione dell' aria inſpirata, la quale vedremo in ſeguito eſſer non meno utile che neceſſaria.

Avendo finor veduto quali e quante ſieno negli uccelli queſte aeree veſciche, come e dove coſtituite, quali oſſa ſieno d' aria ſuſcettibili, e quali i meati per dove l' aria paſſa a queſte liberamente, reſta ora a conſiderarſi a qual uſo ſervir poſſa un così ammirabile e ſorprendente meccaniſmo. Tre ſono le congetture che ſembrano ragionevoli: la prima, che queſte veſciche ſiano come tante appendici dei polmoni inſervienti a ricevere, ed a contener l' aria: la ſeconda che ſervano per facilitare il moto ed il volo agli uccelli: la terza per accreſcere la forza delle lor voci, e per una più lunga protrazione del canto. Eſaminiamone brevemente ciaſcuna.

Il celebre *Huntero* penſando a qual uſo ſervir doveſſero queſti ricettacoli aerei ha creduto che queſti ſi poteſſero calcolare come tanti ſerbatoj d' aria, i quali preſtaſſero vantaggio grandiſſimo agli uccelli, togliendo loro quella difficoltà di reſpiro, alla quale volando vanno ſoggetti. A ciò fu egli condotto particolarmente dall' analogia che paſſa tra gli organi della reſpirazion degli uccelli e quella degli amfibj, come delle vipere, ſerpenti ecc., e ſiccome in queſti i lunghi ſacchi aerei di cui ſono dotati fanno sì che poſſano reſpirare meno frequentemente degli altri, così ha penſato che queſti ricettacoli produr poteſſero negli uccelli gli effetti medeſimi. Io credo bene che queſti ricettacoli preſtar poſſano in alcune circoſtanze un qualche vantaggio alla reſpirazion degli uccelli, ma non però così da paragonarſi con quello degli

gli

gli amfibj accennati. Gli animali freddi hanno senza comparazione alcuna minor bisogno di respirare dei caldi, ed è stato osservato che nel vuoto un ranocchio, una vipera ecc. campa più di quello che faccia un uccello, il che addiviene fra l' altre ragioni, perchè l' aria inspirata da quelli rattiene più a lungo le naturali sue qualità, che quella inspirata da questi. Quindi i ricettacoli aerei dei detti amfibj, che freddi animali sono, ponno somministrare alla loro tarda respirazione un vantaggio senza confronto molto maggiore che negli uccelli, i quali calidi essendo, e cangiando presto perciò la natura dell'aria inspirata, vengono da questo quasi ad una continua necessità di respirare eccitati.

Se questi ricettacoli però sono d' un leggier vantaggio alla respirazion degli uccelli, utilissimi sembrano al moto di questi ed al volo. E' già noto che i quadrupedi di qualunque genere sono dagli uccelli in celerità di gran lunga superati. Il più esercitato, più leggiero, e vigoroso cavallo non può fare più di trenta leghe in un giorno, nè il cervo più di quaranta, e l' immortale Sig. di *Buffon* aggiunge a questo come particolare assai l' esempio del corso di un inglese, il quale in undici ore, e trenta due minuti fece sessanta due leghe cambiando per altro ventuna volta i cavalli. Questa celerità, che nei quadrupedi è grande, è poco o nulla se confrontar si voglia con quella degli uccelli. Nota pure il Sig. di *Buffon* che la facilità con cui da noi si allontana un grosso uccello, un'aquila, un nibbio, un avoltojo, e in meno di tre minuti si perde di vista, prova che può fare venti leghe in un' ora, e più assai di dugento in un giorno, calcolandosi ancora, oltre la notte, molti intervalli di riposo e di quiete. Non reca dunque meraviglia se in meno di sette od otto giorni le nostre rondinelle si portano dal nostro clima sotto la linea, e se si sono vedute in meno di otto o nove passare dall' Europa sulle coste del Senegal.

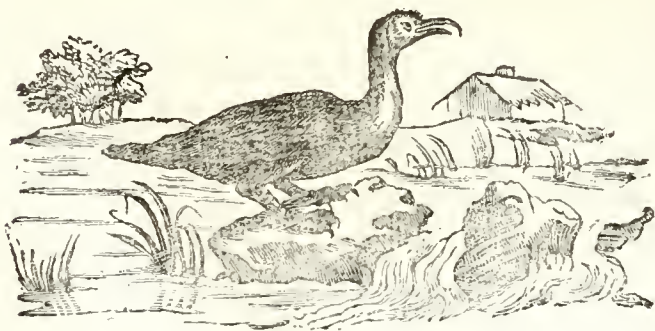
Per ispiegare questa grande lunghezza di volo gli osservatori di maggior considerazione sono ricorsi alla leggerezza, superficie, e disposizion delle piume, alla conformazione delle ali, alla loro estensione e solidità, alla forza dei muscoli, e finalmente alla leggerezza delle ossa, e del corpo. Io non negherò certamente che tutte queste cose non possano e deb-

bano cooperare di molto alla ſpeditezza e lunghezza del volo; ma io credo ancora che a ciò contribuiſcano non poco le veſciche deſcritte, e l' aria che penetra ancora nelle cavità delle oſſa. Abbiamo veduto, che tutta la cavità del torace, e quaſi tutta quella del ventre è riempiuta di queſte veſciche; ora nella inſpirazion penetrando in queſte l' aria, e diſtendendole, due non leggieri effetti produce, l'uno che rende maggiore la ſuperſizie dell' uccello, l' altro che lo rende ſpecificamente più leggiero. Or chi non vede quanto da queſte due mutazioni debba accreſcerſi la facilità e ſpeditezza del volo? Una maggiore ſuperficie viene ad eſſere con maggiore facilità ſoſtenuta dalla colonna dell' aria, ſu di cui poggia; quindi quanto più facilmente viene a librarſi ſu l' aria, tanto meno uſa di fatica nel ſoſtenerſi, e tanto più facilmente può al volo abbandonarſi e far viaggio. Queſta utilità, che merita certo in un lungo cammino la ſua rifleſſione, maggiore ancora ſi fa dall' aria che inſpira, la quale penetrando nelle veſciche, e nell' oſſa, e fors' anche per ſin nelle penne, che pur aria contengono, lo rende ſpecificamente più leggiero; e più ancora perchè rarefacendoſi cagiona per conſeguenza negli uccelli una maggior leggerezza. Or queſta rarefazione, che rende i volatili quaſi a guiſa di tanti palloni volanti, moſtra ad evidenza quanto debba in loro influire e facilitare ancora l' azione e ſpeditezza del volo. Quindi abbiamo veduto che nella maggior parte degli uccelli di gran volo, come nelle cicogne, corvi, pernici ecc. moltiſſime delle loro oſſa ſono vuote, e ricevono aria, là dove i gallinacei, che volano aſſai poco, non hanno d' ordinario che il ſolo omero che goda di queſto vantaggio. Nè a queſto ſi oppone, come venne creduto, fra gli altri l'eſempio dello ſtruzzo, la di cui ſtruttura corriſponde a quella degli altri uccelli, ſebbene non voli, poichè quantunque queſto animale non s'alzi a volo, pure ſcorre con tanta velocità che ſupera ogni più fiero e generoſo cavallo. Or queſta rapidità di moto, e queſta leggerezza in un uccello che per natura ſua è grave aſſai e macchinoſo, a coſa ſi deve ella mai attribuire ſe non ſe all' effetto dell' aria inſpirata? Certo le ragioni addotte ſembrano provarlo ad evidenza. Oltre ciò qualora lo ſtruzzo s' abbandona al corſo diſtende le ali, le agita leggermente,

e sembra ajutarsi in quella maniera però che le brevi di lui ali e disordinate penne glielo ponno permettere. Or questa azione di mover le ali, e più certamente negli altri uccelli viene secondata ed ajutata non poco dalle laterali vesciche, che appunto stanno all' articolazione dell'omero. Ecco come questi ricettacoli aerei facilitar possono il moto ed il volo agli uccelli, il quale si rende in essi così facile e di sì poca fatica, che non di rado avviene che piacevolmente ne ascoltiamo alcuni, i quali in alto ancora, a leggier volo elevati, riempiono l' aria per lungo tratto di tempo delle melodiose loro voci.

Quelli che si sono occupati nel calcolare la forza di queste voci hanno osservato essere maggiore assai la voce degli uccelli che quella dei quadrupedi, ed è parere del lodato Sig. di *Buffon*, *che la voce di quelli sia non solamente più forte di quella di questi relativamente al volume dei loro corpi, ma anche assolutamente*, provando ciò coi fatti desunti dalle proprie osservazioni, e dalla fisica più scrupolosa. Una diversità così grande doveva certo riconoscere una causa corrispondente; quindi hanno osservato che la trachea negli uccelli è più grande e più forte proporzionatamente che nei quadrupedi, i polmoni più estesi, e gli organi tutti della voce così disposti che sembrano formati per accrescerne l' intensità e la forza. Questa organizzazione però, che moltissimo può influire su la forza delle voci, poco o nulla servirebbe qualora gli organi stessi non fossero abbondantemente d' aria provveduti, in quella maniera che un organo musicale, per eccellente che sia, non manda voci se non che deboli e fiacche, s' egli non è di sostanza aerea sovvenuto copiosamente. Lo stesso dee pur dirsi negli uccelli, e siccome i ricettacoli aerei sono in questi quelle sorgenti, che abbondante copia d' aria somministrano agli organi della respirazione, così da questi in massima parte dipender deve la forza maggiore delle lor voci. Quello che diciam della forza convien pure ripeterlo per la protrazione e modulazione del canto ancora. Chi v' è che non abbia più volte piacevolmente ascoltato il dolce e soave canto di un ussignuolo, oppure di un canerino qualora senza mai prender fiato in lunghe e continuate voci ed amorose prorompe, e che non abbia ad un tempo stesso ammirate e la

facilità e la lunghezza del canto medefimo? Tanta copia d'aria, tanta forza quanta a ciò richiedefi, e d'onde mai fi può ella ripetere in così piccoli e dilicati animaletti, fe non ricorriamo alla particolare loro ftruttura, e fegnatamente alle aeree vefciche? Non è però che alcune di quefte fiano più prefto deftinate al canto delle altre, come alcuno ha creduto, e che la cavità fuprema del torace concorra meglio delle altre alla formazion della voce, e ciò perchè forata la membrana dell' offo lunare fi perda la voce, poichè ciò non è particolare di quefta, ma comune a tutte le altre, le quali aperte che fiano, perdono aria, e tolgono per confeguenza l' alimento alla voce ed al canto.

Ecco quello che offervare ho potuto intorno agli organi della refpirazion degli uccelli. Tornando a quello che già v' ho detto a principio, ho a voi dirette quefte offervazioni e per averne il fentimento voftro che pregio affai, e perchè il mondo vegga la ftima e l'amicizia, che vi profeffo, e che voi per moltiffimi titoli meritate.

DELLE FORMOLE
DIFFERENZIALI

La cui integrazione dipende dalla rettificazione delle Sezioni coniche.

Del Sig. GIAN-FRANCESCO MALFATTI Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara.

1. DA che conobbero i Geometri darsi un gran numero di formole differenziali, le quali ricusano di sottomettersi alla integrazione algebraica, o a quella specie d' integrazioni, che suppongono la quadratura del circolo e dell' iperbola, con somma avvedutezza pensarono, che molte di queste formole contumaci potrebbero essere integrate con archi di date ellissi, e di date iperbole; e perciò i loro studj rivolsero all' indagamento delle condizioni, di cui debbon le formole esser dotate, perchè oltre le quantità algebraiche, che possono avervi luogo, le integri uno o più archi di sezion conica.

2. Tra quelli, che si distinsero in sì fatte ricerche, primo dee mettersi il nostro celebre Italiano Conte Giulio Carlo de' *Fagnani* di Sinigaglia, che integrò l' arco della lemniscata, o sia della Cassiniana isocrona (*a*) colla rettificazione dell' arco ellittico e dell' arco iperbolico. Questi fu segui-

(*a*) E' già noto che la lemniscata, e la Cassiniana, che ha il lato del quadrato costante eguale alla semidistanza de' fuochi, sono la medesima curva. L' isocronismo poi di un grave, che discende per un suo arco qualunque cominciato dal punto del nodo, e per la corda corrispondente, è stato da me dimostrato nel libro stampato a Pavia l' anno 1781, che ha per titolo: Della curva Cassiniana e di una nuova proprietà meccanica, di cui essa è dotata Trattato sintetico.

tato dal *Mac-Laurin*, che coſtrinſe alcune formole a ſoggiacere alle ſuddette rettificazioni. Moltiſſime poi ne riduſſe il Sig. d' *Alembert*, le quali ſon raccolte nel Trattato di calcolo integrale del Sig. di *Bougainville*; e vi han poſto pur mano, ampliando ſempre più la teoria, il Sig. *Lexell* ne' Comentarj della nuova Accademia di S. Pietroburgo, e il P. Vincenzo *Riccati*, che io nominerò ſempre con ſommo riſpetto, nell' Opuſc. 2. Tom. 2 de' ſuoi Opuſcoli, e nelle Inſtituzioni analitiche; coſicchè parer potrebbe, che la coſa foſſe ormai ridotta alla ſua perfezione.

3. Ciò non pertanto io trovo, che dovendo la variabile delle formole ſcorrere per tutti i valori, de' quali è ſuſcettibile, quando nelle integrazioni entra l' arco iperbolico unito a quantità algebraica, appariſcono in certe ſue determinazioni delle quantità infinite di ſegno diverſo, le quali laſciano incerto il Geometra ſul valore di queſte differenze, che può eſſere infinito, e alcuna volta ancora finito. Ove queſto valor ſia finito, io m' accingo a provare, non eſſer eſſo altra coſa che la differenza tra l' intero aſſintoto e l' arco infinito corriſpondente di una data iperbola. Ed anche quando queſto valore ſia infinito, trasformati i termini in due altri, un de' quali ſia la differenza ſuddetta, l' altro termine mi fa toſto conoſcere la ſua infinità, e per conſeguenza la infinità dell' integrale della propoſta formola.

4. Affinchè poi ne' caſi pratici, in cui i ſimboli cangianſi in numeri, ſi poſſano avere i valori proſſimi de' noſtri integrali, preſento una ſerie di notabile convergenza, e da neſſun Geometra, per quel ch' io ſappia, avvertita, la quale eſprime il valore della differenza tra l' aſſintoto e l' arco d' iperbola infinito. Con che agevolanſi al maggior ſegno i calcoli, e ſgombranſi quelle oſcurità ed incertezze, nelle quali han laſciate involte le formole integrate i mentovati celebri Autori.

5. Gli archi ellittici, che per lo più meſcolati cogli archi iperbolici compariſcono nelle integrazioni, ci avviſano, che a certi valori della variabile poſſono rimaner trasformati in quadranti delle riſpettive elliſſi, e trovarſi eziandio in compagnia della differenza tra l' aſſintoto e l' arco infinito dell' iperbola. Onde ſiccome aſſegniamo la ſerie convergente,

che equivale a questa differenza, sarà bene che accanto a questa si ponga pure la serie convergente, che rappresenta il quadrante ellittico. Si vedrà, che per le nostre formole dalle due serie unite ne risulta una terza elegantissima: e che il metodo, di cui ci serviamo, per arrivare a ciascuna delle anzidette serie, può esser utile ancora per le approssimazioni de' valori degli archi ellittici ed iperbolici, qualunque siasi la determinazione attribuita alla variabile delle formole.

6. Cominciam dalle serie, che riguardano gli archi ellittici. Nella ellisse VTu (*fig.* 1) di centro C, fuoco F, direttrice HH sia il semiasse $CV = a$; la distanza CA del centro dalla direttrice $= b$. Coll' intervallo del 1.° semiasse CV si descriva da C il quadrante circolare VE, e il raggio CE seghi l' ellisse nel punto T: indi presa un' ascissa CP, si alzi all' ellisse e al cerchio l' ordinata PMN. Chiamato l' arco $EN = u$, sarà $CP = \text{sen.}\, u$; $PN = \text{cos.}\, u$; e in oltre $CT = \frac{a\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b}$. Ma sta per proprietà dell' ellisse $CE : CT :: PN : PM$. Dunque $a : \frac{a\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b} :: \text{cos.}\, u : PM$; e però $PM = \frac{\text{cos.}\, u \sqrt{(b^2 - a^2)}}{b}$. Il differenziale di questo per le note regole è $= -\frac{du \,.\, \text{sen.}\, u \sqrt{(b^2 - a^2)}}{ab}$, e il suo quadrato $= \frac{du^2 \,.\, (\text{sen.}\, u)^2 (b^2 - a^2)}{a^2 b^2}$. Così il differenziale di CP, cioè di $\text{sen.}\, u$, è $= \frac{du \,.\, \text{cos.}\, u}{a}$, e il suo quadrato $= \frac{du^2 (\text{cos.}\, u)^2}{a^2}$ $= \frac{b^2 du^2 (\text{cos.}\, u)^2}{a^2 b^2}$. Preso pertanto nell' ellissi l' archetto infinitamente piccolo Mm, sarà

$$Mm = \frac{du \sqrt{\left(b^2 (\text{sen.}\, u)^2 - a^2 (\text{sen.}\, u)^2 + b^2 (\text{cos.}\, u)^2 \right)}}{ab}$$

$$= \frac{du \sqrt{\left(b^2 - (\text{sen.}\, u)^2 \right)}}{b}.$$

7. Coll' ajuto del canone newtoniano si rivolga in serie il radicale della formola, e troverassi;

$$\frac{\sqrt{(b^2-(\text{sen.}\,u)^2)}}{b}=1-\frac{(\text{sen.}\,u)^2}{2b^2}-\frac{1.(\text{sen.}\,u)^4}{2.4\,b^4}-\frac{1.3.(\text{sen.}\,u)^6}{2.4.6\,b^6}$$

$-\frac{1.3.5\,(\text{sen.}\,u)^8}{2.4.6.8\,b^8}$ ecc. senza limite. Dunque

$$TM=\int\frac{du\sqrt{(b^2-(\text{sen.}\,u)^2)}}{b}=(A)\,u-\int\frac{du\,(\text{sen.}\,u)^2}{2b^2}$$

$$-\left(\int\frac{1.\,du\,(\text{sen.}\,u)^4}{2.4\,b^4}+\int\frac{1.3\,du\,(\text{sen.}\,u)^6}{2.4.6\,b^6}\right.$$

$$\left.+\int\frac{1.3.5\,du(\text{sen.}\,u)^8}{2.4.6.8\,b^8}\,\ldots+\int\frac{1.3.5.7\ldots(n-3)(\text{sen.}u)^n du}{2.4.6\ldots n.b^n}+\text{ecc.}\right)$$

in infinito; dove n rappresenta un numero pari della serie 4, 6, 8 ecc. senza confine. Il calcolo poi de' seni e coseni circolari ci dà $\int du\,(\text{sen.}\,u)^2=\frac{a^2u}{2}-\frac{a\,\text{cos.}\,u\,\text{sen.}\,u}{2}$; e generalmente, quando n nella serie de' pari comincia dal num.° 4;

$$\int du\,(\text{sen.}\,u)^n=\frac{(n-1)(n-3)\ldots 3a^nu}{n(n-2)\ldots 4.2}$$

$$-\text{cos.}\,u\left(\frac{(n-1)\,a^3\,(\text{sen.}\,u)^{n-3}}{n(n-2)}+\frac{(n-1)(n-3)\,a^5\,(\text{sen.}\,u)^{n-5}}{n(n-2)(n-4)}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-3)(n-5)\,a^7\,(\text{sen.}\,u)^{n-7}}{n(n-2)(n-4)(n-6)}+\text{ecc.}\right),$$ intendendo

che la serie continui fino a che si arriva al termine di valore infinito. Quest' omogeneo di comparazione può essere espresso in altra maniera coll' invertere i coefficienti numerici, e le podestà che sono ne' termini. Sarà quindi

$$\int du\,(\text{sen.}\,u)^n=\frac{1.3.5.7\ldots(n-1)\,a^nu}{2.4.6.8\ldots n}-\frac{a\,\text{cos.}\,u\,(\text{sen.}\,u)^{n-1}}{n}$$

$$-\text{cos.}\,u\left(\frac{3.5.7\ldots(n-1)\,a^{n-1}\,\text{sen.}\,u}{2.4.6.8\ldots n}+\frac{5.7.9\ldots(n-1)a^{n-3}(\text{sen.}\,u)^3}{4.6.8\ldots n}\right.$$

$$\left.+\frac{7.9.11\ldots(n-1)a^{n-5}\,(\text{sen.}\,u)^5}{6.8.10\ldots n}+\ldots+\frac{(n-1)a^3\,(\text{sen.}\,u)^{n-3}}{(n-2)\,n}\right).$$

Per conseguenza $TM=u-\frac{a^2u}{4b^2}-\frac{a\,\text{cos.}\,u\,.\,\text{sen.}\,u}{4b^2}$

$-1^2.3^2.5^2\ldots$

$$-\frac{1^2.3^2.5^2....(n-3)^2(n-1)a^n u}{2^2.4^2.6^2....n^2 b^n}+\frac{1.3.5.7....(n-3)a\,\text{cof.}\,u(\text{fen.}\,u)^{n-1}}{n(2.4.6....n)b^n}$$

$$+\frac{1.3.5.7....(n-3)\,\text{cof.}\,u}{2.4.6....n.b^n}\Big(\frac{3.5.7....(n-1)a^{n-1}\,\text{fen.}\,u}{2.4.6....n}$$

$$+\frac{5.7.9....(n-1)a^{n-3}(\text{fen.}\,u)^3}{4.6.8....n}+\frac{7.9.11...(n-1)a^{n-5}(\text{fen.}\,u)^5}{6.8.10....n}+...$$

$$+\frac{(n-1)a^3(\text{fen.}\,u)^{n-3}}{(n-2)n}\ \text{ecc.}\Big)$$. Non s' aggiunge coſtante, perchè tutto ſvaniſce, quando ſono u, e $\text{cof.}\,u=0$.

8. Si deve avvertire, che in queſto ſecondo membro i termini, principiando dal quarto, non eſprimono che i termini generali delle riſpettive ſerie; e che per avere l' arco TM è neceſſario attribuire ſucceſſivamente alla ſpecie n tutti i valori che ſono nella ſerie de' pari 4, 6, 8, ecc. in infinito. Riſulteran quindi infinite ſerie convergenti, una delle quali appartiene ai termini, ov' entra l' arco u; le altre ſpettano alle podeſtà di ſen. u; e queſte ultime non ſolo ſon convergenti, ma di più d' una convergenza creſcente a miſura che creſcono le ſuddette podeſtà. Per la qual coſa è facile il conoſcere, che aſſegnati competenti valori numerici ai ſimboli a, b, u, ſi potrà con non molto calcolo determinare il valor proſſimo di qualunque arco TM della elliſſi.

9. Vogliaſi preſentemente la ſerie, che eſprime il quadrante ellittico TV, che chiamo $\mathfrak{Q}$. In tal caſo diventa $u=$ alla 4ª parte EV della circonferenza circolare, ſen. $u=a$, $\text{cof.}\,u=0$; e denominata col ſimbolo ϕ la circonferenza di raggio 1, avremo $\mathfrak{Q}=\frac{a\phi}{2}-\frac{a^3\phi}{2.4b^2}$

$$-\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2.....(n-3)^2a^{n+1}\phi}{2^2.4^2.6^2......n^2b^n}\right)$$. Poſto $n=4$, l' ultimo termine ſi ſa $=\frac{-1^2.3a^5\phi}{2.2^2.4^2b^4}$. A $n=6$ corriſponde il termine ultimo $=\frac{-1^2.3^2.5a^7\phi}{2.2^2.4^2.6^2b^6}$ ecc. colla legge che è manifeſta.

Dunque $(B)\ \mathfrak{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2}\left(\frac{1.a^2}{2^2b^2} + \frac{1^2.3a^4}{2^2.4^2b^4} + \frac{1^2.3^2.5a^6}{2^2.4^2.6^2b^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2a^8}{2^2.4^2.6^2.8^2b^8}\ \text{ecc.}\right)$, cioè ove A, B, C, D ecc. rappresentino i termini precedenti; $\mathfrak{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2}\left(\frac{1.1a^2}{2^2b^2} + \frac{1.3a^2A}{4^2b^2} + \frac{3.5a^2B}{6^2b^2} + \frac{5.7a^2C}{8^2b^2}\ \text{ecc.}\right)$. La ſerie del 2°. membro di queſte due equazioni è convergente, perchè i numeri de' denominatori in tutti i termini ſon maggiori de' numeri de' numeratori, e perchè $\frac{a}{b}$ in tutte le elliſſi è minore dell' unità; onde ne' caſi particolari ſarà facilmente reperibile il valor proſſimo di $\mathfrak{Q}$.

10. Paſſiam' ora a trovar la ſerie, che eguagli la differenza tra l' aſſintoto e l' arco iperbolico infinito. Sia l' iperbola VMM' (*fig.* 2.) de' due ſemiaſſi CV, VT, coſicchè CTD divenga il ſuo aſſintoto. Coll' iſteſſo vertice primario V, e i ſemiaſſi eguali ad VC ſi deſcriva l' iperbola equilatera VNN', il cui aſſintoto ſia CL. Aſſunta un' aſciſſa CP, vi s' adatti PMN ad angolo retto, che interſechi l' aſſintoto CD in D, e divenga PM l' ordinata dell' iperbola VM, PN l' ordinata dell' equilatera VN. Da M poi all' aſſintoto CD ſi guidi la $M\mathfrak{Q}$ parallela all' altro aſſintoto Ci, e la MG, che compie il rettangolo de' lati MP, CP, tagli l' aſſintoto CD nel punto O.

I. Sarà $CV:VT::PN:PM$. Perchè, per proprietà dell' iperbola equilatera, abbiamo $(CP)^2 - (CV)^2 = (PN)^2$. Ma l' altra curva ci ſomminiſtra l' analogia $(CP)^2 - (CV)^2 : (PM)^2 :: (CV)^2 : (VT)^2$. Dunque $(PN)^2 : (PM)^2 :: (CV)^2 : (VT)^2$; ovvero $CV:VT::PN:PM = \frac{VT.PN}{CV}$.

II. Eſſendo HH la direttrice dell' iperbola VM, e F il ſuo foco, ſarà $CA:CV::PN:CO$. Perchè la teoria delle ſezioni coniche c' inſegna, che ſta $CA:CV::CV:CF = CT$; e pei triangoli ſimili DMO, DPC; $PD:CD::VT:CT::PM:CO$. Ma pel num.° I. $CV:VT::PN:PM$. Dunque CV:

$CT :: PN : CO$, ovvero $AC : CV :: PN : CO = \frac{CV . PN}{CA}$.

III. $OG = PN$; $MO = CP - PN$. Imperciocchè $CT : CV :: CO : OG$, e perchè $CT : CV :: CV : CA$, sarà anche $CV : CA :: CO : OG$. Ma, per l' antecedente numero, $CV : CA :: CO : PN$. Dunque $OG = PN$, e in conseguenza $MO = GM - OG = CP - PN$.

IV. $OQ = \frac{CV(CP - PN)}{2CA}$; $CQ = \frac{CV(CP + PN)}{2CA}$. Si tiri VZ parallela all' assintoto Ci. Siccome TV è la metà di Ti, così TZ è la metà di TC. Ma i triangoli TVC, DMO son simili e similmente posti; in oltre MQ è parallela ad VZ. Quindi anche MQ dividerà per mezzo la DO. Ora sta $CV : CT :: CA : CV :: MO : OD$, e però $CA : CV :: CP - PN$ (III) $: OD$. Avrem dunque $OD = \frac{CV(CP - PN)}{CA}$, e conseguentemente $OQ = \frac{CV(CP - PN)}{2CA}$. E perchè $CQ = CO + OQ$

$$= \frac{CV . PN}{CA} \text{ (II)} + \frac{CV(CP - PN)}{2CA},$$ risulterà

$$CQ = \frac{CV(CP + PN)}{2CA}.$$

V. Non cangiano le cose dimostrate ne' precedenti numeri, ancorchè l' iperbola VM cadesse superiormente all' equilatera VN, cioè il semiasse secondo fosse maggiore del primo.

VI. Si conduca CLN' assintoto dell' iperbola equilatera, e si produca VT fino a questo assintoto in L, sarà $CV = VL$. Ora l' estremo punto dell' assintoto infinito CLN' coincidendo in un punto infinitamente lontano della curva, se supporremo CP, PN divenute le infinite CP', $P'N'$, N' cadrà precisamente dove l' assintoto incontra l' iperbola, ed avremo il triangolo infinito $CP'N'$ simile al triangolo CVL. Ma $CV = VL$. Dunque l' infinita ascissa CP' è eguale all' infinita ordinata $P'N'$.

VII. Raccoglieremo da ciò, che essendo in genere la porzione assintotica $CQ = \frac{CV(CP + PN)}{2CA}$ (IV), pel caso dell'

ascissa e dell' ordinata infinite, diventerà l' intero assintoto $CTM' = \frac{CV.CP'}{CA} = \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP'}{CV} = \frac{CV.P'N'}{CA}$.

VIII. La *TK* parallela all' asse primario *CV* determina la *CK* eguale al 2.° semiasse: Ora il num.° I. ci presenta $PN = \frac{CV.PM}{TV} = \frac{CV.CG}{CK}$. Il perchè nell' ipotesi delle coordinate infinite, cangiandosi *CG* nell' infinita $CG' = P'M'$, sarà l' assintoto $CTM' = \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CG'}{CK}$; il che serve per gli archi iperbolici, che si riferiscono al 2.° asse, quand' essi divengono infiniti.

11. Queste nozioni premesse, chiamo $CV = a$, $CA = b$; il doppio settore *CNV* diviso per $CV = u$, onde risulta $CP = \text{cos. iperb.}^{\circ}\, u$, $PN = \text{sen. iperb.}^{\circ}\, u$; e pel num.° I, $PM = \frac{VT \,.\, \text{sen. ip}\,.\, u}{a}$. Il differenziale di *CP* si fa $= \frac{du \,.\, \text{sen. ip}\,.\, u}{a}$, e il differenziale di $PM = \frac{du \,.\, VT \,.\, \text{cos. ip}\,.\, u}{a^2}$. Ma, preso l' archetto minimo *Mm*, il quadrato di questo archetto è eguale alla somma de' quadrati de' due suddetti differenziali. Dunque, poichè $CT = CF = \frac{a^2}{b}$, e $(\text{cos. ip}\,.\, u)^2 - (\text{sen. ip}\,.\, u)^2 = a^2$, si avrà $Mm = \frac{du \sqrt{((\text{cos. ip}\,.\, u)^2 - b^2)}}{b}$.

12. Per integrare questa formola, butto in serie il radicale, e mi nasce; $\sqrt{((\text{cos. ip}.u)^2 - b^2)} = \text{cos. ip}.u - \frac{b^2}{2\, \text{cos. ip}.u} - \frac{1.b^4}{2.4\,(\text{cos. ip}.u)^3} - \frac{1.3b^6}{2.4.6\,(\text{cos. ip}.u)^5} - \frac{1.3.5b^8}{2.4.6.8\,(\text{cos. ip}.u)^7}$, ecc. senza limite. Questa serie è convergente, perchè le quantità numeriche sono maggiori ne' denominatori de' termini, che ne' numeratori, e di più in tutte le iperbole $\text{cos. ip}\,.\, u > b$. Sicchè $\int Mm = VM = (C) \int \frac{du.\, \text{cos. ip}.u}{b} - \frac{b}{2} \int \frac{du}{\text{cos. ip}.u}$

$$-\left(\frac{1.b^3}{2.4}\int\frac{du}{(\text{cof. ip.}u)^3}+\frac{1.3b^5}{2.4.6}\int\frac{du}{(\text{cof. ip.}u)^5}\right.$$
$$+\frac{1.3.5b^7}{2.4.6.8}\int\frac{du}{(\text{cof. ip.}u)^7}+\ldots\ldots+\frac{1.3.5.7\ldots.(m-2)b^m}{2.4.6\ldots\ldots(m+1)}\times$$
$$\left.\int\frac{du}{(\text{cof. ip.}u)^m}\text{ ecc.}\right)$$ in infinito, rappreſentando m un numero qualunque poſto nella ſerie de' diſpari 3, 5, 7, 9, ecc.

13. Quanto al 1°. termine di queſt' omogeneo, i teoremi de' ſeni e coſeni iperbolici ce 'l danno $=\frac{a.\text{ſen. ip.}u}{b}$. Il 2°. laſciamol per ora coll' eſpreſſione della ſommatoria; e per gl' integrali ſuſſeguenti, applichiamo la ſuddetta dottrina alla integrazione della formola generale $\frac{du}{(\text{cof. ip.}u)^m}$, la qual ſi trova eſpreſſa dalla ſeguente equazione; $\int\frac{du}{(\text{cof. ip.}u)^m}$

$$=\frac{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots..3.2}{(m-1)(m-3)\ldots.4.2a^{m-1}}\int\frac{du}{\text{cof. ip.}u}$$
$$+\frac{\text{ſen. ip.}u}{(m-1)a(\text{cof. ip.}u)^{m-2}}$$
$$+\text{ſen. ip.}u\left(\frac{m-2}{(m-1)(m-3)a^3(\text{cof. ip.}u)^{m-3}}\right.$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5)a^5(\text{cof. ip.}u)^{m-5}}$$
$$+\frac{(m-2)(m-4)(m-6)}{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)a^7(\text{cof. ip.}u)^{m-7}}$$
$$\left.+\ldots.+\frac{(m-2)(m-4)(m-6)\ldots..3.1}{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots.4.2a^{m-2}(\text{cof. ip.}u)^2}\right),$$

o uſando d' un' inverſione ſimile all' altra dell' arco ellittico;

$$\int\frac{du}{(\text{cof. ip.}u)^m}=\frac{1.3.5\ldots..(m-2)}{2.4.6\ldots..(m-1)a^{m-1}}\int\frac{du}{\text{cof. ip.}u}$$
$$+\frac{\text{ſen. ip.}u}{(m-1)a(\text{cof. ip.}u)^{m-2}}$$

$$+\text{sen. ip.}u\left(\frac{3.5.7\ldots.(m-2)}{2.4.6\ldots..(m-1)a^{m-2}(\text{cos. ip.}u)^2}\right.$$

$$+\frac{5.7.9\ldots.(m-2)}{4.6.8\ldots..(m-1)a^{m-4}(\text{cos. ip.}u)^4}$$

$$+\frac{7.9.11\ldots.(m-2)}{6.8.10\ldots.(m-1)a^{m-6}(\text{cos. ip.}u)^6}+\ldots..$$

$$\left.+\frac{m-2}{(m-1)(m-3)a^3(\text{cos. ip.}u)^{m-3}}\right).$$

14 Integriamo ora la formola $\int\frac{du}{\text{cos. ip.}u}$. Poichè $D.(\text{sen. ip.}u)=\frac{du.\text{cos. ip.}u}{a}$, sarà $du=\frac{aD.(\text{sen. ip.}u)}{\text{cos. ip.}u}$, e quindi $\int\frac{du}{\text{cos. ip.}u}=\int\frac{aD.(\text{sen. ip.}u)}{(\text{cos. ip.}u)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{a^2D.(\text{sen. ip.}u)}{a^2+(\text{sen. ip.}u)^2}$. Ma $\int\frac{a^2D.(\text{sen. ip}.u)}{a^2+(\text{sen. ip}.u)^2}$ è eguale a un arco circolare di raggio a, tangente, sen. ip. u. Dunque, chiamando d quest' arco, risulta $\int\frac{du}{\text{cos. ip}.u}=\frac{d}{a}$.

15. Surroghiam finalmente in (C) questi valori, ed otterremo l' arco iperbolico $VM=(D)\frac{a\,\text{sen. ip}.u}{b}-\frac{bd}{2a}$

$$-\frac{1^2.3^2.5^2\ldots.(m-2)^2b^md}{(m+1)(2^2.4^2.6^2\ldots..(m-1)^2a^m}-\frac{(1.3.5.7\ldots..(m-1)b^m.\text{sen. ip.}u}{2.4.6\ldots.(m+1)}$$

$$\left(\frac{3.5.7\ldots.(m-2)}{2.4.6\ldots(m-1)a^{m-2}(\text{cos. ip}.u)^2}+\frac{5.7.9\ldots.(m-2)}{4.6.8\ldots(m-1)a^{m-4}(\text{cos. ip}.u)^4}\right.$$

$$+\frac{7.9\ldots..(m-2)}{6.8.10\ldots.(m-1)a^{m-6}(\text{cos. ip}.u)^6}+\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{m-2}{(m-1)(m-3)a^3(\text{cos. ip}.u)^{m-3}}\text{ ecc.}\right)\text{ in infinito}.$$

16. Qui pure avvertiremo, come abbiam fatto al num.° 8 per l' arco ellittico; 1.°, che in questa integrazione non

va aggiunta alcuna coſtante, perchè, eſſendo nullo VM, ſvaniſce ſen. ip. u, e in conſeguenza l' arco d, onde tutto va a zero; 2.°, che i termini dell' omogeneo, cominciando dal terzo, eſprimono i termini generali delle ſerie corriſpondenti, dovendoſi, per avere il valore di VM, aſſegnar ſucceſſivamente alla ſpecie m tutti i valori de' numeri diſpari 3, 5, 7 ecc. ſenza limite; 3.°, che per eſſere ſempre $b < a$, e molto più $<$ coſ. ip. u, le ſerie indi naſcenti, ordinate ſecondo le podeſtà de' coſeni, avranno maggior convergenza, quanto maggiore è la podeſtà del coſeno; finalmente, che attribuiti valori numerici ai ſimboli a, b, u, ſi verrà a determinare in numeri il valor proſſimo di qualunque arco iperbolico VM della data iperbola.

17. Stabiliſcaſi ora l' arco VM infinito. A tale ipoteſi corriſpondono il ſeno, e il coſeno iperbolici infiniti ed eguali. Dunque ſvaniranno affatto le ſerie del 4°. termine nell' omogeneo (D) del numero 15; l' arco circolare d, che ha la tangente infinita, diventerà il quadrante della periferia; e fatto ϕ eguale alla ſemicirconferenza di raggio 1, ſarà l' arco infinito $VM' = \frac{a.\,\text{ſen. ip.}u}{b} - \frac{b\phi}{4}$

$$- \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2.\ldots.(m-2)^2\, b^{m-1}}{(m+1)\,(2^2.4^2.6^2.\ldots.(m-1)^2\, a^{m-1}}\right),\ \text{cioè};$$

$$\frac{a.\,\text{ſen. ip.}u}{b} - VM' = \frac{b\phi}{4}$$

$$+ (E)\,\frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2.\ldots(m-2)^2\, b^{m-2}}{(m+1)(2^2.4^2.6^2\ldots(m-1)^2 a^{m-1}}\right).$$

18. Fatto $m = 3$, riſulta il termine $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2 b^2}{4.2^2 a^2}\right)$. All' ipoteſi di $m = 5$ compete $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2 b^4}{6.2^2.4^2 a^4}\right)$. La ſuſſeguente di $m = 7$ dà $(E) = \frac{b\phi}{2}\left(\frac{1^2.3^2.5^2 b^6}{8.2^2.4^2.6^2 a^6}\right)$ ecc., giacchè la legge è evidente. Di più pel num.° VII. ove infinito ſia l' arco dell' iperbola, diventa $\frac{a.\,\text{ſen. ip.}\,u}{b}$, l' intero aſſintoto

CM' ; e quindi $\frac{a\,.\,\text{sen. ip}\,.\,u}{b} - VM'$, è eguale alla differenza tra l' assintoto e l' arco iperbolico infinito . Espressa perciò questa differenza col simbolo Δ, sarà $\Delta = (F)\frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2}\Big(\frac{1^2.b^2}{2^2 4a^2}$

$$+ \frac{1^2.3^2.b^4}{2^2.4^2.6a^4} + \frac{1^2.3^2.5^2 b^6}{2^2.4^2.6^2.8a^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2 b^8}{2^2.4^2.6^2.8^2.10a^8} \text{ ecc.}\Big)$$

$$= \frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2}\Big(\frac{1^2 b^2}{4.4a^2} + \frac{3^2 b^2.A'}{4.6\,a^2} + \frac{5^2 b^2.B'}{6.8\,a^2} + \frac{7^2 b^2.C'}{8.10\,a^2} \text{ ecc.}\Big),$$

intendendo che A' , B' , C' ecc. significhino i termini precedenti. Dall' esser $b < a$ in qualunque iperbola, la convergenza della presente serie si rende manifestissima ; onde al caso che b, ed a abbian valori numerici , avrem pronto il valor prossimo di Δ colla addizione di non molti suoi termini .

19. Dopo le anzidette teorie mettiamci sotto all' occhio la forma che hanno i moltipli de' differenziali degli archi ellittici ed iperbolici , i quali si riferiscono ad un' ascissa centrale situata nel 1.° o nel 2.° asse . Chiamato pertanto f il 1.° semiasse della sezione conica , g il 2.° , cz l' ascissa centrale, e $\frac{1}{\sqrt{h}}$ il moltiplo dell' arco, avremo, siccome è noto

1.° $\frac{1}{\sqrt{h}}$. diff. dell' arco ellittico coll' ascissa cz nel 1.° asse

$$= \frac{dz\sqrt{(f^2-(f^2-g^2)c^2z^2:f^2)}}{\sqrt{(f^2h:c^2-hz^2)}}$$

2.° $\frac{1}{\sqrt{h}}$. diff. dell' arco ellittico coll' ascissa cz nel 2.° asse

$$= \frac{dz\sqrt{(g^2+(f^2-g^2)c^2z^2:g^2)}}{\sqrt{(g^2h:c^2-hz^2)}}$$

3.° $\frac{2}{\sqrt{h}}$. diff. dell' arco iperbolico coll' ascissa cz nel 1.° asse

$$= \frac{dz\sqrt{(-f^2+(f^2+g^2)c^2z^2:f^2)}}{\sqrt{(-f^2h:c^2+hz^2)}}$$

4.° $\frac{1}{\sqrt{h}}$. diff. dell' arco iperbolico coll' ascissa cz nel 2.° asse

$$= \frac{dz\sqrt{(g^2+(f^2+g^2)c^2z^2:g^2)}}{\sqrt{(g^2h:c^2+hz^2)}}$$. Quindi concluderemo, che tutte le formole differenziali, le quali sono integrabili cogli archi ellittici, ed iperbolici, si potranno con opportune sostituzioni trasfigurare nella forma generica $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$, in cui A, B, C, D possono essere quantità positive o negative. Supporrò dunque, che sotto qualunque diverso aspetto si sian presentate al Geometra formole, che per l' integrazione ammettano i suddetti archi, egli le abbia cogli artifizj dell' analisi ridotte alla suddetta forma generale, la quale nel decorso di questo scritto sarà l' oggetto unico delle nostre considerazioni.

20. Arrivati che saremo alla formola $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$, non potrem tosto concludere, che il suo integrale sia o un arco semplice di sezion conica, o un moltiplo di quest' arco; perchè ciò dipende non solo dai segni che si voglion prefissi alle quantità costanti A, B, C, D, ma eziandio dal valor maggiore o minore di queste medesime quantità. In alcuni casi la formola differenziale potrebb' essere immaginaria, come se fosse $\frac{dx\sqrt{(-A-Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$, e per conseguenza impossibile la sua integrazione in termini reali. In alcuni altri essa debb' essere nuovamente trasformata, affinchè il confronto colle 4 formole del numero 19 non induca alcun assurdo. Una piccola riflessione farà conoscere il caso della impossibilità; ed ove, essendo reale, senza incongruenze ricusi di farsi identica con una delle quattro suddette, tre Lemmi basteranno a cangiarla in più formole per modo, che di alcune algebraicamente, e dell' altre colla notata identicità se ne possa assegnare l' integrazione.

21. Ecco il 1°. Lemma; $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$

$= \frac{(BC-AD)x^2dx}{C\sqrt{(A+Bx^2)}\sqrt{(C+Dx^2)}} + \frac{Adx\sqrt{(C+Dx^2)}}{C\sqrt{(A+Bx^2)}}$. La riduzione dell' omogeneo renderà evidente la verità di questo Lemma. Si faccia ora $\sqrt{(A+Bx^2)} = z$. Da questa sostituzione trarremo $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}} = \frac{(BC-AD)}{BC} \cdot \frac{dz\sqrt{(-A+z^2)}}{\sqrt{(BC-AD+Dz^2)}}$ $+ \frac{Adx\sqrt{(C+Dx^2)}}{C\sqrt{(A+Bx^2)}}$. Diremo poi: o ciascuna delle due formole di quest' ultimo membro soffre senza assurdo il confronto coi moltipli de' differenziali degli archi, o no. Nel 1.° caso la proposta formola è già integrata; nel 2.° v' è bisogno di una nuova trasformazione.

22. Sia in genere $\frac{dt\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}}$ la formola nuovamente trasformabile. Pongasi $u = \frac{\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}}$, onde proviene $t = \frac{\sqrt{(E-Gu^2)}}{\sqrt{(-F+Hu^2)}}$; e sarà $\int \frac{dt\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}} = \int udt$ $= ut - \int tdu = \frac{t\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}} - \int \frac{du\sqrt{(E-Gu^2)}}{\sqrt{(-F+Hu^2)}}$; e questo è il 2.° Lemma.

23. Se questa trasformazione praticata nella formola $\frac{dt\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}}$ non valesse a rendere il termine $\int \frac{du\sqrt{(E-Gu^2)}}{\sqrt{(-F+Hu^2)}}$ identico con un moltiplo d' arco di sezion conica, si faccia quest' altra sostituzione; $u' = \frac{\sqrt{(G+Ht^2)}}{\sqrt{(E+Ft^2)}}$, che dà $t = \frac{\sqrt{(-G+Eu'^2)}}{\sqrt{(H-Fu'^2)}}$. Alzata al quadrato l' una o l' altra di queste frazioni, si ha $Eu'^2 + Ft^2u'^2 = G + Ht^2$; e differenziando; $Eu'du' + Ftu'.D.(tu') = Htdt$, cioè $\frac{dt}{u}$ $= \frac{F.D(tu')}{H} + \frac{Edu'}{Ht}$; e quindi $\int \frac{dt\sqrt{(E+Ft^2)}}{\sqrt{(G+Ht^2)}}$

$= \frac{Ft\sqrt{(G+Ht^2)}}{H\sqrt{(E+Ft^2)}} + \frac{E}{H}\int\frac{du'\sqrt{(H-Fu'^2)}}{\sqrt{(-G+Eu'^2)}}$, equazione, in cui consiste il 3.° Lemma. O coll' una o coll' altra trasformazione, che fanno nascere questi due ultimi Lemmi tratti dal citato Opuscolo Riccaziano, otterrem sempre la bramata integrazione.

24. Da ciò si raccoglie, che la formola $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$ al più resta integrata con due archi di sezion conica, prescindendo dalla quantità algebraica, che pur vi ha luogo. Il metodo usato dal P. *Riccati* porta alcune volte le integrazioni a tre archi coll' unione di più termini algebraici; laddove il mio si raccomanda per la sua maggiore semplicità, avendosi con esso al più 3 soli termini integrali, come vedremo ne' seguenti numeri, cioè una quantità algebraica, un moltiplo d' arco ellittico, e un moltiplo d' arco iperbolico. Ma venghiamo ad esaminare partitamente tutte le combinazioni, che può ricever la formola generale $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$ e per rapporto ai segni, e per rapporto ai valori delle costanti, che moltiplicano i termini vincolati dai radicali; onde nelle integrazioni o apparisca colla quantità algebraica il solo arco iperbolico, o l' arco ellittico e l' arco iperbolico insieme. Di quelle modificazioni di formole, le cui integrazioni dipendono dalla quantità algebraica e dall' arco ellittico unicamente, non faremo menzione, perchè queste, qualunque valor reale s' attribuisca alla variabile, non avranno mai differenze finite di termini infiniti.

25. Venga innanzi a tutte la formola 1.ª $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$, nella quale m, n, p, q sian tutte positive. Due ipotesi si posson fare; 1.ª, che sia $np > mq$, 2.ª, che sia $mq > np$. Pel caso della 1.ª ipotesi, confrontata la formola colla 4.ª del num.° 19, si vedrà a un tratto, che il suo integrale è

$= \frac{1}{\sqrt{q}}\Big($ arco iperbolico di 1.° semiasse; $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; ascissa

2.° semiasse; $\sqrt{m}$

centrale nel 2.° asse; $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$), e non è soggetto ad alcuna difficoltà. La 2.ª ipotesi di $mq > np$ vuole per l' integrazione della formola il soccorso de' due primi Lemmi notati ai numeri 21, 22, e si avrà $\int \frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$

$= -\frac{(mq-np)}{np} \cdot \frac{x\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}} + \frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}$ (arco ellittico di 1.° sem. $\sqrt{m}$; 2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$ ascissa cent. nel 1.° asse; $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$)

$+ \frac{m}{p\sqrt{n}}$ (arco iperbolico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; 2.° sem. $\sqrt{p}$ ascissa cent. nel 2.° asse; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$) $+ C$.

26. Si accetti l' ipotesi, che fatto $x = 0$ sia l' integrale $= 0$. Perchè con tale supposizione svaniscono tutti i termini dell' omogeneo, non va aggiunta alcuna costante, e riman $C = 0$. Se si fa $x = \infty$, l' arco ellitico ha $\sqrt{m}$ per ascissa nel 1°. asse, cioè l' ascissa e il primo semiasse sono eguali; e quindi l' arco diventa il quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' ellissi. Il termine algebraico si cangia in quest' altra formola; $-\frac{(mq-np).x}{p\sqrt{nq}}$, che è una quantità infinita negativa. E perchè l' arco ip. ha l' ascissa nel 2°. asse $= \frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$, cioè infinita, sarà pure esso arco un infinito ma positivo.

27. Per avere la differenza di questi due infiniti, riesce opportuno l' esprimere il termine algebraico $-\frac{(mq-np)x}{p\sqrt{nq}}$ in quest' altra maniera equivalente; $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} - \frac{mx\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}$, onde, quando x è infinita, risulti $\int \frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}} = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$

$+\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\cdot\mathcal{Q}-\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big(x\sqrt{q}$ — arco ip. di 1° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; 2° sem. $\sqrt{p}$

ascissa cent. nel 2° asse; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\Big)$. Consultiamo ora il num°. VIII, che in qualunque iperbola riferita al 2°. asse ci dà il valor dell' assintoto infinito $=\frac{CV^2.CG'}{CA.CK}$. Poichè per le teorie coniche $\frac{CV^2}{CA}$ è eguale alla radice della somma de' quadrati de' due semiassi, sarà nel caso nostro $\frac{CV^2}{CA}=\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}}$, e $\frac{CG'}{CK}$ $=\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$. Quindi il nostro assintoto $=x\sqrt{q}$, e $x\sqrt{q}$ — arco ip. suddetto eguale alla differenza Δ tra l' assintoto e l' arco ip. infinito. Perilchè, quando sia $mq>np$ e l' ascissa centrale infinita, si trova $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}=\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ $+\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\mathcal{Q}-\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$. E siccome questi due ultimi termini sono quantità finite, rimanendo il primo $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ un infinito, nella accettata supposizione; $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$ diventa $=\infty$. Ed ecco, come la incertezza, che potea nascere sulla finità, o infinità della differenza tra i due termini infiniti, resti colla scorta delle nostre teorie totalmente dileguata.

28. 2ª. formola da integrarsi; $\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$. Qui si vede subito, essere il minor valore della $x=\pm\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, potendo poi crescere sì positivamente che negativamente all' infinito. Nella formola presente, siccome in tutte l' altre avvenire per maggior comodo considereremo le sole x positive, e intanto

diremo, che è il minor valore della $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, e il massimo eguale all' infinito positivo. Poscia col maneggio de' due primi Lemmi, troverem presto; $\int\frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\left(\frac{mq+np}{np\sqrt{q}}\right)$ (arco iperbolico di 1.° sem. $\sqrt{m}$; ascissa cent. nel 1.° asse;

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(mq+np)}}\Big)-\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m+nx^2)}}+\frac{m}{p\sqrt{n}}$ (arco ellittico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa cent. nel 2.°; $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times$

2.° sem. $\sqrt{p}$

$\sqrt{\frac{(-p+qx^2)}{(m+nx^2)}}\Big)$.

29. Nell' ipotesi che la formola integrata svanisca, quando $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, l' ascissa cent. dell' arco iperbolico riesce eguale al 1°. semiasse $\sqrt{m}$; e però l' arco è nullo, siccome nulle risultano le quantità susseguenti, onde per l' integrale completo non si ricerca costante di alcuna sorta. Ma se si pone $x=\infty$, l' arco iperbolico proviene infinito di valore, perchè ha infinita l' ascissa centrale $\frac{x\sqrt{(mnq)}}{\sqrt{(mq+np)}}$; ed infinita eziandio è la quantità algebraica che gli tien dietro, la quale si cangia in $-\frac{mx\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}$. Finalmente riuscendo l' ascissa dell' arco ellittico eguale al 2°. semiasse $\sqrt{p}$, l' arco diventa il quadrante Q dell' ellisse. Quanto ai due termini infiniti, che hanno i segni contrarj, convien vedere, se la loro differenza sia finita o infinita: e a questo fine scriveremo la quantità algebraica e il moltiplo dell' arco iperbolico equivalentemente così; $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}-\left(\frac{mq+np}{np\sqrt{q}}\right)\Big(x\sqrt{n}-$ arco iperbolico di

1.° sem. $\sqrt{m}$; ascissa cent. nel 1.°; $\left.\frac{x\sqrt{(mnq)}}{\sqrt{(mq+np)}}\right)$. Appresso
2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

dal num.° VII trarremo l' assintoto $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP}{CV}$
$= \frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{q}} \cdot \frac{x\sqrt{nq}}{\sqrt{(mq+np)}} = x\sqrt{n}$; dal che si rileva, essere i termini tra la parentesi la differenza Δ tra l' assintoto e l' arco infinito. Per conseguenza, fatto $x=\infty$, hassi $\int \frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} - \frac{(mq+np)}{np\sqrt{q}} \cdot \Delta + \frac{m\mathfrak{Q}}{p\sqrt{n}}$; e siccome Δ, $\mathfrak{Q}$ sono quantità finite e $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ un infinito, sarà infinito di valore il nostro integrale.

30. 3.ª formola, $\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$. In questa formola è chiaro, che i limiti de' valori di x sono $x=0$; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, divenendo essa immaginaria ne' valori maggiori. Fatto uso del 1.° e del 3.° Lemma, si avrà pronto il suo integrale
$= \frac{(mq+np)\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(p+qx^2)}}{npqx} - \frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}$ (arco iperbolico di 1.° sem. $\sqrt{q}$; ascissa cent. nel 1.°; $\left.\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\right)$
2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$

$+ \frac{m}{p\sqrt{n}}$ (arco ellittico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa cent.
2.° sem. $\sqrt{p}$
nel 2.°; $\left.\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\right) + C$.

31. Abbracciando l' ipotesi, che tutto vada a zero, quando $x=0$, resterà determinata la costante C. In tal caso sva-

nisce l' arco ellittico, perchè è nulla l' ascissa centrale; ma i due primi termini, che si mutano in questi altri;

$\frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}\left(\frac{\sqrt{p}}{x}\right.$ — arco iperbolico di 1.° sem. $\sqrt{q}$, ascissa cent. nel 1.°, $\left.\frac{\sqrt{(mpq)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\right)$ sono la differenza di due
2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$

quantità infinite. Poichè l'ascissa si assume nel 1.° asse, risulta l' assintoto iperbolico $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP'}{CV} = \frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{mp}}{x\sqrt{(mq+np)}}$ $= \frac{\sqrt{p}}{x}$; sicchè i due termini vincolati dalla parentesi dinotano la solita differenza finita Δ. Nella ipotesi di $x = 0$, sarà quindi $0 = \frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq} + C$, o sia

$C = -\frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq}$; e il completo integrale della formola $= \frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq}\left(\frac{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{m}} - \Delta -\right.$ arco iperbolico di 1.° sem. $\sqrt{q}$; ascissa nel 1.° $\left.\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{(mq+np)}}\right)$
2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$

$+ \frac{m}{p\sqrt{n}}\left(\right.$ arco ellittico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\left.\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}\right)$. Ove poi saper vogliasi, quale integrale competa
2.° sem. $\sqrt{p}$

al valor massimo di x, cioè a $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, fatta la sostituzione, si troverà, che l' arco iperbolico, e la quantità algebraica svaniscono, e che l' arco ellittico diventa il quadrante

dell'

dell' ellissi. Onde essendo $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, si ha $\int \frac{dx^2 \sqrt{(m - nx^2)}}{\sqrt{(p + qx^2)}}$ $= - \frac{(mq + np) \Delta \sqrt{m}}{npq} + \frac{m\mathfrak{Q}}{p\sqrt{n}}$; il che fa conoscere, non poter mai l' integrale della formola aver valore infinito.

32. 4^a. formola; $\frac{dx\sqrt{(m - nx^2)}}{\sqrt{(p - qx^2)}}$. Distinguiamo in questa due ipotesi; la 1^a. che sia $mq > np$; la 2^a. che sia $np > mq$. Nella prima l' integrazione accetta solo l' arco ellittico e non è di quelle che noi consideriamo. Laonde si assuma l' altra di $np > mq$ che porta all' arco iperbolico, e riflettiamo a 3 casi. Il 1°. che il valore di x sia posto tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \infty$; il 2°. che stia tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; il 3°. che stia tra i limiti $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $x = 0$. Non c' è difficoltà alcuna pel 1°. caso, avvegnachè l' integrale della formola è $\frac{1}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. sem. $\sqrt{m}$; ascissa cent. nel 1°. asse;

2°. sem. $\frac{\sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{q}}$

$\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$), supponendo che l' integrale sia zero, quando $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$. Cresciuta poi x fino all' infinito, poichè l' ascissa $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$ è infinita, tosto si scorge, che l' arco, e in conseguenza l' integral della formola è un infinito.

33. Se x è collocata tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, che è il caso 2°, si fa chiara l' immaginarietà della formola, onde altro non ci resta che il 3°. caso del valore di x posto tra

i limiti $x = 0$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, pel quale l' uſo del 3°. Lemma con breve calcolo ci preſenta; $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{nx\sqrt{(p-qx^2)}}{q\sqrt{(m-nx^2)}}$ $- \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. ſem. $\sqrt{q}$, aſciſſa nel 1°; $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{p}} \times$

2.° ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{m}}$

$\frac{\sqrt{(p-qx^2)}}{\sqrt{(m-qx^2)}}$). Tralaſcio la coſtante, perchè ſuppongo, che fatto $x = 0$, tutto ſvaniſca; il che avviene sì nella parte algebraica, come anche nell' arco iperbolico, la cui aſciſſa centrale ſi fa eguale al 1.° ſemiaſſe. Pongo ora $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; e i due termini dell' integrazione diventano due quantità infinite che ſi poſſono eſprimer così; $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{q}}\left(\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\right.$ — arco iperbolico di 1.° ſem. $\sqrt{q}$; aſciſſa nel 1.° $\left.\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{np}} \times \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\right)$.

2.° ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{m}}$

Ma pel num.° VII. eſſendo l' aſſintoto $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP}{CV}$, nel caſo noſtro diventa $= \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$. Dunque i termini nella parenteſi ſono la conſueta differenza Δ; e conſeguentemente ſe ſia $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, ſarà $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{\Delta\sqrt{m}}{q}$.

34. 5ª. formola; $\frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$. Qui pure han luogo due ipoteſi; 1ª. $np > mq$; 2ª. $mq > np$. Nella 1ª. ſuppoſizione, i limiti de' valori della x ſono; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, de' quali il primo è minore, l' altro maggiore; e coll' unico 2°.

Lemma agevolmente ſi ottiene; $\int \frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$
$= \frac{x\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} - \frac{1}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$;
2°. ſem. $\sqrt{m}$

aſciſſa nel 2°.; $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$). Ommetto di aggiunger coſtante, perchè ſtabiliſco, che la formola integrata s' annulli, quando $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$. Diaſi ora a x il maggior valore, cioè ſi faccia $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; e i due termini della integrazione diventano due infiniti, che ſi poſſono mettere ſotto queſta forma; $\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\frac{\sqrt{p}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}\sqrt{(p-qx^2)}} \right.$ — arco iperbolico di
1°. ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; aſciſſa nel 2°; $\left. \frac{\sqrt{m}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{n}\sqrt{(p-qx^2)}} \right)$. In
2°. ſem. $\sqrt{m}$

queſta iperbola la ſomma de' quadrati de' ſemiaſſi è $\frac{np}{q}$. Dunque $\frac{CV^2}{CA} = \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$; $\frac{CG'}{CK} = \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{n}\sqrt{(p-qx^2)}}$; e l' aſſintoto $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CG'}{CK}$ (num. VIII) $= \frac{\sqrt{p}\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}\sqrt{(p-qx^2)}}$. Quindi, eſſendo $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, avremo $\int \frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{\Delta}{\sqrt{q}}$, appartenendo Δ all' iperbola di 1°. ſem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}$; 2°. ſem. $\sqrt{m}$.

35. La 2ª. ipoteſi fiſſa $mq > np$. Poichè queſto è l' ultimo caſo tra quelli, in cui le formole eſigono per la loro integrazione gli archi iperbolici, noi il tratterem per diſteſo, affinchè indi trar ſi poſſa norma pel maneggio degli altri, che abbiamo ne' ſuperiori numeri conſiderati. I limiti

de' valori di x nella formola $\frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$, quando $mq>np$, sono $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, che è il valor minore; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, che è il valor maggiore. Ora dal 1°. Lemma abbiamo; $\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{(mq-np)x^2dx}{p\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}$ $-\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}$; e posto $\sqrt{(m-nx^2)}=z$; risulta $\frac{x^2dx}{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}=-\frac{dz\sqrt{(m-z^2)}}{n\sqrt{(mq-np-qz^2)}}$. Il confronto poi di quest' ultima formola colla 1ª. del num. 19 ci manifesta essere $\int-\frac{dz\sqrt{(m-z^2)}}{n\sqrt{(mq-np-qz^2)}}=-\frac{1}{n\sqrt{q}}$ (arco ellittico di 1°. sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel 1°., $\frac{z\sqrt{mq}}{\sqrt{(mq-np)}}$); onde

2°. sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$\frac{(mq-np)}{p}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(-p+qx^2)}}=-\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}$ (arco ellittico di 1°. sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel 1°;

2°. sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}$). L' altro termine $-\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}$ non è riducibile a nessuna delle formole del num°. 19. Valendosi perciò del 2°. Lemma si metta $u=\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$, onde abbiasi $\int\frac{dx\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}=ux-\int\frac{du\sqrt{(p+mu^2)}}{\sqrt{(q+nu^2)}}$. Ma, perchè $mq>np$; $\int\frac{du\sqrt{(p+mu^2)}}{\sqrt{(q+nu^2)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ (arco iperbolico di

1°. sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2°. $\frac{u\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$), come fa cono-
2°. sem. $\sqrt{p}$
scere il paragone colla 4 formola del num°. 19. Dunque in vece di u sostituito il suo valore per x, sarà

$$\int -\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} = -\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}}\Big(\text{ arco}$$

iperbolico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} \times$
2.° sem. $\sqrt{p}$
$\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\Big)$; e finalmente $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$
$= -\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\Big($ arco ellittico di 1.° sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel
2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$
1.° ; $\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}\Big) - \frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}}\Big($ arco iper-

bolico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} \times$
2.° sem. $\sqrt{p}$
$\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}\Big) + C$.

36. L' ipotesi che l' integrale svanisca, quando vuolsi $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, valor minimo della variabile, serva a determinare la costante C. In tale supposizione l' ascissa centrale dell' arco ellittico diventa $= \sqrt{m}$, che è il 1°. semiasse, ove si prendon le ascisse. Facendosi pertanto l' arco eguale al quadrante ellittico $\mathfrak{Q}$, ed annullandosi evidentemente gli altri due termini, avrem l' equazione $o = -\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}\mathfrak{Q} + C$; e quindi

$$\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \Big(\frac{mq-np}{np\sqrt{q}}\Big)\Big(\mathfrak{Q} - \text{arco ellittico di}$$

1°. sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel 1.°, $\frac{\sqrt{mq}\cdot\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}$)

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$$-\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big(\text{arco iperbolico di}$$

1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.°, $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}\times\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$).

2.° sem. $\sqrt{p}$

37. Renderemo anche più semplice questo integrale, se rifletteremo, che la differenza tra il quadrante dell' ellissi e il notato arco è eguale all' arco ellittico de' predetti semiassi, coll'ascissa centrale nel 2.° asse $=\frac{n\sqrt{p}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(mq-np)}}$. Sicchè, quando $mq>np$; $\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\left(\frac{mq-np}{np\sqrt{q}}\right)\Big($ arco ellittico di 1.° sem. $\sqrt{m}$; ascissa nel 2.°, $\frac{n\sqrt{p}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(mq-np)}}$)

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$$-\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}}+\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big(\text{arco iperbolico di}$$

1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}$).

2.° sem. $\sqrt{p}$

38. Dal minimo valore di $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, che ci ha servito a determinare la costante C, si passi al massimo $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, e si cerchi quale integrale gli corrisponda. A buon conto, per l' arco ellittico, riuscendo l' ascissa nel 2.° asse eguale a $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$, che è appunto il 2.° semiasse, il suddetto arco si muta nel quadrante $\mathfrak{Q}$; i due termini poi che seguono sono di valore infinito; ma adoperando l' usitata espressione, colla introduzione del valore dato di x li potremo scriver così;

$-\frac{m}{p\sqrt{n}}\Big(\frac{\sqrt{m}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}\sqrt{(m-nx^2)}}$ — arco iperbolico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{p}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}\Big)$. Ora 2.° sem. $\sqrt{p}$

poichè, coll' adattamento de' valori del num.° VIII. alla presente iperbola, diventa $\frac{CV^2}{CA}=\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}}$, e $\frac{CG'}{CK}=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}$, onde si trae l' intero assintoto $=\frac{\sqrt{m}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}\sqrt{(m-nx^2)}}$, cioè $=$ al termine algebraico, che dentro la parentesi precede l' arco iperbolico infinito; resta chiarissima la conclusione, che gli anzidetti due termini equivalgono a $\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$, e che, ove suppongasi $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ si fa $(G)\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}}$ Q $-\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$.

39. Ritornando ora alle serie (B), (F) de' num. 9, 18, le quali esibiscono il valore del quadrante Q dell' ellissi, e la differenza Δ tra l' assintoto e l' arco infinito dell' iperbola, e sono $Q=\frac{a\phi}{2}-\frac{a\phi}{2}\Big(\frac{1.a^2}{2^2.b^2}+\frac{1^2.3a^4}{2^2.4^2b^4}+\frac{1^2.3^25a^6}{2^2.4^2.6^2b^6}\text{ ecc.}\Big)$;

$\Delta=\frac{b\phi}{4}+\frac{b\phi}{2}\Big(\frac{1^2.b^2}{2^2.4a^2}+\frac{1^2.3^2b^4}{2^2.4^2.6a^4}+\frac{1^2.3^2.5^2.b^6}{2^2.4^2.6^2.8a^6}\text{ ecc.}\Big)$, farem la riflessione, che, nell' una e nell' altra serie, a rappresenta il 1°. sem. della curva; b la distanza del centro dalla direttrice, la qual distanza nella ellisse è 3ª. proporzionale dopo la radice della differenza de' quadrati de' due semiassi e il semiasse 1°; nella iperbola è 3.ª proporzionale dopo la radice della somma, e lo stesso 1°. semiasse. Pel nostro quadrante Q, sarà dunque $a=\sqrt{m}$; $b=\frac{m\sqrt{q}}{\sqrt{(mq-np)}}$, e

$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{mq}}$; e però $Q=\frac{\phi\sqrt{m}}{2}-\frac{\phi\sqrt{m}}{2}\Big(\frac{1.(mq-np)}{2^2mq}$

$+\frac{1^2.3(mq-np)^2}{2^2.4^2m^2q^2}+\frac{1^2.3^2.5(mq-np)^3}{2^2.4^2.6^2m^3q^3}$ ecc.$\Big)$ per la differenza Δ avrem poi $a=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; $b=\frac{mq-np}{\sqrt{(mnq)}}$, e $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{mq}}$, che è lo ſteſſo valore di $\frac{a}{b}$ nel quadrante ellittico. Quindi $\Delta=\frac{\phi(mq-np)}{4\sqrt{(mnq)}}+\frac{\phi(mq-np)}{2\sqrt{(mnq)}}\Big(\frac{1^2(mq-np)}{2^2.4mq}$ $+\frac{1^2.3^2(mq-np)^2}{2^2.4^2.6m^2q^2}+\frac{1^2.3^2.5^2.(mq-np)^3}{2^2.4^2.6^2.8m^3q^3}$ ecc.$\Big)$. E colla ſoſtituzione di queſte due ſerie nell' equazione (G), quando $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, ſarà

$$\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}=\frac{\phi\sqrt{m}(mq-np)}{2np\sqrt{q}}$$
$$-\frac{\phi\sqrt{m}(mq-np)}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1.(mq-np)}{2^2mq}+\frac{1^2.3(mq-np)^2}{2^2.4^2m^2q^2}\text{ ecc.}\Big)$$
$$-\frac{\phi\sqrt{m}(mq-np)}{4np\sqrt{q}}-\frac{\phi\sqrt{m}(mq-np)}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1^2(mq-np)}{2^2.4mp}$$
$$+\frac{1^2.3^2(mq-np)^2}{2^2.4^2.6m^2q^2}\text{ ecc.}\Big),$$

ovvero $-\int\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$

$$=\frac{\phi\sqrt{m}(mq-np)}{4np\sqrt{q}}-\frac{\phi\sqrt{m}(mq-np)}{2np\sqrt{q}}\Big(\frac{1(mq-np)}{2^2mq}$$
$$+\frac{1^2(mq-np)}{2^2.4mq}+\frac{1^2.3(mq-np)^2}{2^2.4^2m^2q^2}+\frac{1^2.3^2(mq-np)^2}{2^2.4^2.6m^2q^2}$$
$$+\frac{1^2.3^2.5(mq-np)^3}{2^2.4^2.6^2m^3q^3}+\frac{1^2.3^2.5^2(mq-np)^3}{2^2.4^2.6^2.8m^3q^3}+\text{ecc.}\Big).$$

La legge di queſta elegante ſerie è chiariſſima, ſiccome è chiara ancora la ſua convergenza, atteſochè i fattori numerici de' denominatori ſono in ciaſcun termine maggiori de' fattori numerici ne' numeratori; in oltre $\frac{mq-np}{mq}$, e molto più le creſcenti podeſtà intere di queſta frazione ſon ſempre minori dell' unità.

40. Un bell' eſempio della neceſſità di conoſcere il valore della differenza tra l' aſſintoto e l' arco iperbolico infinito ci viene ſomminiſtrato da un de' problemi, che ſcioglie il celebre

celebre P. *Fontana* nel I. Tomo delle Memorie della *Società Italiana* alla pag. 123 e seguenti. Questo problema risguarda la misura della luce, che riceve un punto collocato dentro l' aja d'un cerchio, la cui circonferenza sia raggiante; e viene sciolto dal suddetto Autore prima nell' ipotesi ordinaria, che la quantità del lume ricevuto debba unicamente ripetersi dalla quantità illuminatrice moltiplicata nel quadrato inverso della distanza del punto illuminato dal punto, da cui si scaglia il raggio illuminatore: poi nell' altra di *Bouguer* e di *Lambert*, i quali oltre i detti elementi giudicano necessario d' introdurvi ancora il seno dell' angolo d' emanazione, vale a dire quell' angolo, che fa il raggio lucido colla superficie del corpo luminoso, da cui emana.

41. Non dipartendomi dalle traccie del ch. Autore stabilisco che dalla circonferenza raggiante del cerchio $SMRB$ venga illuminato il punto F (*fig.* 3), per cui e pel centro C del cerchio conduco il diametro BR. Prendo poi l'arco variabile RM, e guidato il raggio CM, indi da M calata sul diametro la normale MN, chiamo ϕ l' angolo MCO, essendo O il punto, ove concorre col raggio prodotto la tangente MO. Fatto poi $CR = r$, $CF = K$, che dà $RF = K + r$, avremo $CN = r \,.\, \text{cos.}\, \phi$; $NM = r \,.\, \text{sen.}\, \phi$; $NF = K + r \,.\, \text{cos.}\, \phi$, e l' archetto infinitesimo $Mm = rd\phi$. Secondo l' ipotesi Euleriana, supposta T una data illuminazione, sarà quella che raccoglie F dall' archetto $Mm = \frac{Trd\phi}{(FM)^2} = \frac{Trd\phi}{K^2 + r^2 + 2Kr \,.\, \text{cos.}\, \phi}$, perchè $FM = \sqrt{((FN)^2 + (NM)^2)} = \sqrt{(K^2 + r^2 + 2Kr \,.\, \text{cos.}\, \phi)}$. Adottando poi l' ipotesi di *Lambert*, bisogna moltiplicare il trovato differenziale pel seno dell' angolo FMO, che è l' angolo d' emanazione. Ora $FMO = FMN + MCO = FMN + \phi$, e in conseguenza $\text{sen.}\, FMO = \text{sen} \cdot FMN \,.\, \text{cos.}\, \phi$

$$+ \text{sen.}\, \phi \,.\, \text{cos.}\, FMN = \frac{(K + r\, \text{cos.}\, \phi)\, \text{cos.}\, \phi + r\, (\text{sen.}\, \phi)^2}{FM}$$

$$= \frac{K \,.\, \text{cos.}\, \phi + r}{\sqrt{(K^2 + r^2 + 2Kr \,.\, \text{cos.}\, \phi)}}.$$ Perilchè la quantità di luce, che da Mm si comunica a F con quest' ultima ipotesi, risulta $\frac{Trd\phi\,(r + K \,.\, \text{cos.}\, \phi)}{(K^2 + r^2 + 2Kr \,.\, \text{cos.}\, \phi)^{3:2}} = \frac{Tr}{b^{3:2}} \left(\frac{d\phi\,(r + K \,.\, \text{cos.}\, \phi)}{(1 + e \,.\, \text{cos.}\, \phi)^{3:2}} \right)$, ove

si ponga $K^2 + r^2 = h$, $\frac{2Kr}{K^2 + r^2} = e$. Quest' ultima sostituzione fa conoscere, che e debb' esser sempre minore dell' unità, perchè $K^2 + r^2 > 2Kr$ in tutti i casi.

42. Arrivato il P. *Fontana* alla formola $\frac{d\phi\,(r + K.\,\text{cos}.\,\phi)}{(1 + e.\,\text{cos}.\,\phi)^{3:2}}$, intraprende d' integrarla coll' ajuto delle serie; ma queste gli risultano sì incomode e inviluppate, che io ho creduto tornar meglio assai di rivolgersi ad integrarla colle rettificazioni degli archi ellittici ed iperbolici, ottenendosi per tal mezzo una illuminazione totale, che riesce al maggior segno elegante.

43. Per piegar la formola a ricever l' aspetto di una di quelle, che negli antecedenti numeri abbiamo già integrato, faccio $1 + e.\,\text{cos}.\,\phi = \frac{1}{x^2}$; onde nasce $\text{cos}.\,\phi = \frac{1 - x^2}{ex^2}$;

$r + K.\,\text{cos}.\,\phi = \frac{erx^2 - Kx^2 + K}{ex^2}$; $1 + \text{cos}.\,\phi = \frac{1 - x^2(1 - e)}{ex^2}$;

$1 - \text{cos}.\,\phi = -\frac{1 + x^2(1 + e)}{ex^2}$;

$\text{sen}.\,\phi = \frac{\sqrt{\left(1 - x^2(1 - e)\right)}\sqrt{\left(-1 + x^2(1 + e)\right)}}{ex^2}$. E perchè $\text{cos}.\,\phi$ cala a misura che cresce l' arco RM, sarà, differenziando la prima equazione, $-ed\phi.\,\text{sen}.\,\phi = -\frac{2dx}{x^3}$, cioè

$$d\phi = \frac{2dx}{x\sqrt{\left(1 - x^2(1 - e)\right)}\sqrt{\left(-1 + x^2(1 + e)\right)}}$$ e quindi

$$\frac{Tr}{h^{3:2}} \cdot \frac{d\phi\,(r + K.\,\text{cos}.\,\phi)}{(1 + e.\,\text{cos}.\,\phi)^{3:2}}$$

$$= \frac{2Tr}{h^{3:2}} \cdot \frac{dx\,(erx^2 - Kx^2 + K)}{e\sqrt{\left(1 - x^2(1 - e)\right)}\sqrt{\left(-1 + x^2(1 + e)\right)}}.$$

44. Lascio da parte il fattor costante $\frac{2Tr}{h^{3:2}}$, e m' accingo ad integrare la formola;

$\frac{dx(erx^2 - Kx^2 + K)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$, che esprimo con equivalenza in tal modo; $\frac{dx(erx^2 + eKx^2 - eKx^2 + K - Kx^2)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$

$$= \frac{(r+K)x^2dx}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}} - \frac{Kdx\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}}.$$

Posto in seguito $\sqrt{(1-x^2(1-e))} = z$, mi nasce;

$$\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}} = \frac{-dz\sqrt{(1-z^2)}}{(1-e)\sqrt{(2e-z^2(1+e))}},$$

di cui l' integrale è $= \frac{-1}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}$ (arco ellittico di 1.° sem. 1; ascissa cent. nel 1.° asse; $\frac{z\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}}$), come 2.° sem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

porta il confronto colla 1.ª formola del num. 19. Coll' ajuto poi del 2.° Lemma si troverà l' integrale dell' altra formola; $\frac{dx\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}} = \frac{x\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}}$

$- \frac{1}{\sqrt{(1-e)}}$ (arco iperbolico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; ascissa
2.° sem. 1

cent. nel 2.° asse; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \times \frac{\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}}$). Quindi nella precedente integrazione surrogando a z il suo valore $\sqrt{(1-x^2(1-e))}$, sarà;

$$\int \frac{dx(erx^2 - Kx^2 + K)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}} = - \frac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}$$

(arco ellittico di 1.° sem. 1; ascissa cent. nel 1.°,
2.° sem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

$\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}} \cdot \sqrt{\left(1-x^2(1-e)\right)}\Big) - \frac{Kx\sqrt{\left(-1+x^2(1+e)\right)}}{e\sqrt{\left(1-x^2(1-e)\right)}}$

$+ \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}}\Big($ arco iperbolico di 1.° fem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; afciffa
2.° fem. 1
cent. nel 2.°; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \times \frac{\sqrt{\left(-1+x^2(1+e)\right)}}{\sqrt{\left(1-x^2(1-e)\right)}}\Big) + C$: o ritornando al fimbolo cof. ϕ; $\frac{1}{2}\int \frac{d\phi\,(r+K.\,\text{cof.}\,\phi)}{(1+e.\,\text{cof.}\,\phi)^{3:2}}$

$= - \frac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}\Big($ arco ellittico di 1.° fem. 1 ; afciffa
2.° fem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$
cent. nel 1.° $\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{cof.}\,\phi)}}\Big)$

$- \frac{K\sqrt{(1-\text{cof.}\,\phi)}}{e\sqrt{(1+e.\,\text{cof.}\,\phi)}\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}} + \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}}\Big($ arco iperbolico di 1.° fem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; afciffa centrale nel 2.°,
2.° fem. 1
$\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{cof.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}}\Big) + C.$

45. Quando l' arco RM è nullo, neceffariamente debb' effer nulla l' illuminazione. Fatto pertanto cof. $\phi = 1$, che corrifponde all' arco $RM = 0$, verremo a determinare la coftante C. Ora in quefta fuppofizione l' afciffa centrale dell' arco ellittico diventa 1, cioè il 1°. femiaffe; il che vuol dire, che l' arco fi cangia nel quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' ellifli; in oltre fvanifcono i due fuffeguenti termini dell' integrazione. Dunque ci fi prefenterà l' equazione;

$0 = - \frac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} + C$, cioè $C = \frac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}$; e perciò farà l' integrale completo della noftra formola

$= \frac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} \Big(\mathfrak{Q} -$ arco ellittico di 1°. fem. 1 ; afciffa

2°. fem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

nel 1° ; $\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{cof.}\,\phi)}}\Big)$

$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{(1-e)}\sqrt{(1-\text{cof.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{cof.}\,\phi)}\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}} -$ arco iperbo-

lico di 1°. fem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; afciffa nel 2° ;

2°. fem. 1

$\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{cof.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}}\Big) = (H)\Big(\frac{r+K}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}\Big)\Big($ arco

ellittico di 1°. fem. 1 ; afciffa nel 2° ;

2°. fem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$

$\frac{(1-e)\sqrt{(1-\text{cof.}\,\phi)}}{\sqrt{2}\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+e.\,\text{cof.}\,\phi)}}\Big)$

$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{(1-e)}\sqrt{(1-\text{cof.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+e.\,\text{cof.}\,\phi)}\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}} -$ arco iperbo-

lico di 1°. fem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; afciffa nel 2° ;

2.° fem. 1

$\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\text{cof.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}}\Big).$

46. Crefciuto l' arco RM fino a divenire la femiperiferia RMB, fi cangia cof. ϕ in -1, e l' afciffa centrale dell' arco ellittico in (H) fi fa eguale al 2°. femiaffe ; ovvero l' arco fi fa il quadrante $\mathfrak{Q}$ dell' elliffe, mentre gli altri due termini, che feguitano, fon due quantità infinite. Quefte, introdotta la modificazione di cof. $\phi = -1$, fi fcrivan così;

$- \frac{K}{e\sqrt{(1-e)}} \Big(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{cof.}\,\phi)}} -$ arco iperbolico di

1°. sem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; ascissa nel 2°; $\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}$);
2°. sem. 1

ed invocato il numero VIII, che ci dà per nostra iperbola $\frac{CV'}{CA}=\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1-e)}}$; $\frac{CG'}{CK}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}$, troverem l' assintoto $=\frac{CV'}{CA}\cdot\frac{CG'}{CK}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}$. Sicchè i due soprannotati termini dentro la parentesi vengono ad esprimere la differenza Δ tra l' assintoto e l' arco iperbolico infinito; e perciò l' integrale spettante alla semicirconferenza RMB sarà; $\frac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}}-\frac{K\Delta}{e\sqrt{(1-e)}}$, appartenendo $\mathfrak{Q}$ all' ellissi di 1.° sem. 1; 2.° sem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$, e Δ all' iperbola di 1.° sem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2.° sem. 1.

47. Poichè il 1.° semiasse dell' ellissi, cui spetta il quadrante $\mathfrak{Q}$, è 1, e il 2.° $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$, nella serie ($B$) del num. 9. sarà $a=1$, $b=\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}}$, $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1+e)}}$, dai quali valori risulta $\mathfrak{Q}=\frac{\phi}{2}-\frac{\phi}{2}\Big(\frac{1.2e}{2^2(1+e)}+\frac{1^2.3.2^2e^2}{2^2.4^2(1+e)^2}$ $+\frac{1^2.3^2.5.2^3e^3}{2^2.4^2.6^2(1+e)^3}$ ecc.$\Big)$. Parimente riferendosi Δ all' iperbola di 1.° sem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2.° sem. 1, nell' altra serie (F) del num. 18. sarà $a=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; $b=\frac{2e}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}$, e $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1+e)}}$, onde si trae $\Delta=\frac{e\phi}{2\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}$ $+\frac{e\phi}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}\Big(\frac{1^2.2e}{2^2.4(1+e)}+\frac{1^2.3^2.2^2e^2}{2^2.4^2.6(1+e)^2}$

$+ \frac{1^2.3^2.5^2.2^3e^3}{2^2.4^2.6^2.8(1+e)^3}$ ecc.). Softituendo pertanto questi valori nell' integrale $\frac{(r+K)\mathfrak{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} - \frac{K\Delta}{e\sqrt{(1-e)}}$, e rimesso ancora il fattore $\frac{2Tr}{b^{3:2}}$, si avrà la metà dell' illuminazione che investe il punto $F = \frac{Tr^2\phi}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}} - \frac{Tr\phi(r+K)}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}}$ $\left(\frac{1.2e}{2^2(1+e)} + \frac{1^2.3.2^2e^2}{2^2.4^2(1+e)^2} \text{ ecc.}\right) - \frac{2TrK\phi}{b^{3:2}(1-e)\sqrt{(1+e)}}$ $\left(\frac{1^2.2e}{2^2.4(1+e)} + \frac{1^2.3^2.2^2e^2}{2^2.4^2.6(1+e)} \text{ ecc.}\right) = (H)\ \frac{Tr^2\phi}{(r-K)^2(r+K)}$ $- \frac{Tr\phi}{(r-K)^2}\left(\frac{1.2^2Kr}{2^2(r+K)^2} + \frac{1^2.3.2^4K^2r^2}{2^2.4^2(r+K)^4} + \frac{1^2.3^2.5.2^6K^3r^3}{2^2.4^2.6^2(r+K)^6} \text{ ecc.}\right)$ $- \frac{2TrK\phi}{(r-K)^2(r+K)}\left(\frac{1^2.2^2Kr}{2^2.4(r+K)^2} + \frac{1^2.3^2.2^4K^2r^2}{2^2.4^2.6(r+K)^4}\right.$ $\left. + \frac{1^2.3^2.5^2.2^6K^3r^3}{2^2.4^2.6^2.8(r+K)^6} \text{ ecc.}\right) = \frac{Tr^2\phi}{(r-K)^2(r+K)}$ $- \frac{Tr\phi}{(r-K)^2}\left(\frac{1.1.2^2Kr}{2^2(r+K)^2} + \frac{1.3.2^2Kr.A}{4^2(r+K)^2} + \frac{3.5.2^2Kr.B}{6^2(r+K)^2}\right.$ $\left. + \frac{5.7.2^2Kr.C}{8^2(r+K)^2} \text{ ecc.}\right) - \frac{2TrK\phi}{(r-K)^2(r+K)}\left(\frac{1^2.2^2Kr}{4.4(r+K)^2}\right.$ $\left. + \frac{3^2.2^2Kr.A'}{4.6(r+K)^2} + \frac{5^2.2^2Kr.B'}{6.8(r+K)^2} + \frac{7^2.2^2Kr.C'}{8.10(r+K)^2} \text{ ecc.}\right)$ Le majuscole A, B, C ecc.; A', B', C' ecc. di quest' ultima serie sono i termini, che precedono immediatamente.

48. Vogliasi a cagion d' esempio, che il punto F resti collocato alla metà del raggio CB. Divenendo in tal caso $K = \frac{r}{2}$, la metà della illuminazione si fa $= \frac{8T\phi}{r} - \frac{4T\phi}{r}$ $\left(\frac{1.1.8}{2^2.9} + \frac{1.3.8A}{4^2.9} + \frac{3.5.8B}{6^2.9} + \frac{5.7.8C}{8^2.9} \text{ ecc.}\right) = \frac{8T\phi}{3r}\left(\frac{1^2.8}{4.4.9}\right.$ $\left. + \frac{3^2.8A'}{4.6.9} + \frac{5^2.8B'}{6.8.9} + \frac{7^2.8C'}{8.10.9} \text{ ecc.}\right)$. Nell' una e nell' altra se-

rie vanno presi 32 termini, se si vuole spingere l' approssimazione fino a tre, o quattro decimali; e dopo le necessarie riduzioni proviene la suddetta metà di luce
$= \frac{T\phi}{r}$ (1. 246066), ovvero per maggior esattezza ne' numeri, $= \frac{T\phi}{r}$ (1. 246). Ora, siccome quando F cade nel centro C, svaniscono K ed e, e nasce il valore della semi-illuminazione $= \frac{T\phi}{r}$, se faremo, che $\frac{T\phi}{r}$ rappresenti l' unità di luce, sarà quella, che riceve F situato alla metà del raggio CB alla semiperiferia raggiante $= 1.246$, cioè 1 e poco più di $\frac{1}{5}$.

49. A misura che s' intende F ritirarsi verso B, K s' accosta al valore di r, ed e al valore di 1, cosicchè fatto $K = r$, diventa $e = 1$, e per ragione del fattore $(r - K)^2$ ne' denominatori della serie (H), la illuminazione riesce infinita. Ciò però meglio si rileva, se ci riportiamo alla formola differenziale; $\frac{2Trdx\,(erx^2 - Kx^2 + K)}{h^{3:2}.\,e\sqrt{(1 - x^2(1-e))}\sqrt{(-1 + x^2(1+e))}}$.
Questa nell' ipotesi di $e = 1$ così si modifica; $\frac{2Tr^2dx}{h^{3:2}\sqrt{(-1+2x^2)}}$
$= \frac{Tdx}{r\sqrt{2}\sqrt{(-1+2x^2)}}$, di cui l' integrale completo è
$= \frac{T}{2r} l.\left(\frac{1}{x\sqrt{2} - \sqrt{(2x^2-1)}}\right) = \frac{T}{2r} l.\left(\frac{\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{2} - \sqrt{(1-\text{cos}.\phi)}}\right)$
$= \frac{T}{2r} l.\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1-\text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1+\text{cos}.\phi)}}\right)$, onde si deduce, che quando $\text{cos}.\phi = -1$, cioè quando F cade in B, viene F investito da una luce infinita.

50. Questa infinità di luce non gli può derivare, che dall' unico punto raggiante B, in cui esso s' immerge, perchè qualunque arco RM minore di RB non gliene comunica che una quantità finita. Dunque l' indole del problema non permette,

permette, che dopo aver ſuppoſta nulla l' illuminazione di F nella nullità dell' arco RM, ſi cerchi quanto lume inveſta F ſituato in R; a motivo che la coincidenza di F con qualunque punto raggiante della periferia lo rende infinitamente illuminato; e ciò ripugna all' ipoteſi della nullità di luce, che F raccoglie da R. Per la qual coſa appunto, volendo immergere F in qualche punto luminoſo, ho ſcelto il punto oppoſto B, che ſalva egregiamente la prima ſuppoſizione.

51. E' coſa per altro curioſa il vedere a che s' agguagliano in tal caſo i termini della noſtra integrazione. Poichè l' immerſione di F in B produce che ſia $K = r$, $e = 1$, naſce la ſemi-illuminazione in genere $= \frac{T}{r(1-e)}$ (arco ellittico di 1°. ſem. 1; aſciſſa nel 2°; $\frac{(1-e)\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{2\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}$)

2°. ſem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}}$

$$-\frac{T\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{r\sqrt{2(1+\text{coſ.}\,\phi)}} + \frac{T}{r\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}$$ (arco iperbolico di

1°. ſem. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-e)}}$; aſciſſa nel 2°; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}$).

2°. ſem. 1

Il 1°. termine è un moltiplo infinito d' un arco ellittico, che ha il ſemiaſſe ſecondo e l' aſciſſa centrale nulli; l' ultimo è parimente un moltiplo infinito ma di un arco iperbolico che ha infinito il primo ſemiaſſe e nulla l' aſciſſa centrale, coſicchè parer potrebbe, che, prendendoſi le aſciſſe nel 2°. aſſe, l' arco non differiſſe per niente dall' aſciſſa centrale e foſſe il ſuo moltiplo $= \frac{T}{r\sqrt{(1-e)}.\sqrt{2}} \times$

$$\left(\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}\right) = \frac{T}{2r} \times \frac{\sqrt{(1-\text{coſ.}\,\phi)}}{\sqrt{(1+\text{coſ.}\,\phi)}}$$, quantità algebraica e finita. E pure con tal concluſione cadrebbeſi in parallogiſmo, perchè differenziando sì il moltiplo dell' arco ellittico come anche il moltiplo dell' arco iperbolico, dopo

aver posto $u = \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\phi)}}$ e fatte le dovute sostituzioni, si arriva nell' uno e nell' altro caso al differenziale $\frac{Tdu\sqrt{(1+u^2)}}{2r}$, il cui integrale sarà ai suddetti due moltipli comune. Ora quest' integrale è $\frac{T}{4r}\Big(u\sqrt{(1+u^2)}$ $+ l.(u + \sqrt{(1+u^2)})\Big) = \frac{T}{4r}\Big(\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{1 + \text{cos}.\phi}$ $+ l.\big(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\phi)}}\big)\Big)$, cioè d' un valore onninamente diverso dal superiore; $\frac{T}{2r} \times \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\phi)}}$; e può servir d' avviso ai calcolatori di non trar troppo presto conclusioni dai loro calcoli, senza aver prima esaminato ogni cosa colla maggiore attenzione. Intanto noi diremo, che, quando $e = 1$, varrà l' equazione; $\frac{1}{\sqrt{(1-e)}}\Big($arco ellittico di 1°. sem. 1; ascissa nel 2°; $\frac{(1-e)\sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{2\sqrt{(1 + \text{cos}.\phi)}}$; 2°. sem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big($arco iperbolico di 1°. sem. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-e)}}$; ascissa nel 2°; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\phi)}}$; 2°. sem. 1$\Big)$;
e che i due archi moltipli presi insieme verranno a formar l' integrale $\frac{T}{2r}\Big(\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{1 + \text{cos}.\phi} + l.\big(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\phi)}}\big)\Big)$ $= \frac{T\sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{r\sqrt{2(1 + \text{cos}.\phi)}} + \frac{T}{2r} l.\big(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\phi)}}\big)$. Aggiunto poi a questi due il termine algebraico $- \frac{T\sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{r\sqrt{2(1 + \text{cos}.\phi)}}$, si ottiene la mezza illuminazione $= \frac{T}{2r} l.\big(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \text{cos}.\phi)}}{\sqrt{(1 + \text{cos}.\phi)}}\big)$ tal quale precisamente s' è trovata al num°. 49.

MEMORIA

SULL' EQUAZIONI A DIFFERENZE FINITE E PARZIALI.

Del Sig. PIETRO PAOLI Pubblico Professore nella Università di Pavia.

I Due illustri Geometri, i Signori *de la Place* e *de la Grange* hanno insegnato ad integrare l' equazioni a differenze finite e parziali. Il primo nel Tomo 6.° e 7.° delle *Memorie presentate all' Accademia di Parigi* ha dato un metodo generale per integrare l' equazioni lineari a differenze finite e parziali di un ordine qualunque n, a coefficienti comunque variabili o costanti. Il secondo nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* dell' anno 1775. ha dato due metodi per integrare le medesime equazioni, quando i coefficienti sono costanti. Se $Z^{(y,x)}$ rappresenta una funzione delle variabili y ed x, l' equazioni finora trattate si riducono alla forma seguente:

$$\begin{aligned} Z^{(y,x)} = {} & AZ^{(y-1,x)} + BZ^{(y-2,x)} + \ldots + NZ^{(y-n,x)} + X \\ & + A'Z^{(y,x-1)} + B'Z^{(y-1,x-1)} + \ldots + N'Z^{(y-n,x-1)} \\ & + A''Z^{(y,x-2)} + B''Z^{(y-1,x-2)} + \ldots + N''Z^{(y-n,x-2)} \\ & \vdots \\ & + A^{(n)}Z^{(y,x-n)} + B^{(n)}Z^{(y-1,x-n)} + \ldots + N^{(n)}Z^{(y-n,x-n)} \end{aligned}$$

ove per A, A', ecc., B, B', ecc., e per X il Sig. *de la Place* intende qualunque funzione data di x; il Sig. *de la Grange* suppone che A, B, ecc. siano quantità costanti, ed $X = 0$: ambedue pongono n essere una quantità costante.

Niuno di loro ha mai pensato a trattare quel caso, in cui

le differenze di y suppongonsi funzioni della variabile x (a). Tale è l' equazione semplicissima $Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}$, alla quale si giunge, se il numero delle maniere si cerca, nelle quali un numero y può esser la somma di x termini della serie naturale 1, 2, 3, 4, 5 ecc. I metodi del Sig. *de la Grange* sono inapplicabili a questa sorte di equazioni: quello del Sig. *de la Place* può applicarvisi, come vedremo in appresso; ma egli non ha mai considerate quest' equazioni. Avendomi pertanto il primo metodo del Sig. *de la Grange* suggerita un' altra via, per cui giunger si può alla integrazione di quest' equazioni, ho pensato di presentare ai Geometri un saggio di quelle ricerche, che ho fatte in questa materia.

ARTICOLO I.

Dell' integrazione dell' equazioni a differenze finite, variabili, e parziali.

1. Sia pertanto proposto d' integrar l' equazione

$$Z^{(y,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{(y-1,x)} + \underset{x}{B}\, Z^{(y-2,x)} + \ldots + \underset{x}{X}\, Z^{(y-x,x)} + \ldots$$
$$+ \underset{x}{A'}\, Z^{(y,x-1)} + \underset{x}{B'}\, Z^{(y-1,x-1)} + \ldots + \underset{x}{X'}\, Z^{(y-x,x-1)} + \ldots$$

ove $\underset{x}{A}$, $\underset{x}{A'}$, $\underset{x}{B}$, $\underset{x}{B'}$, ecc. esprimono funzioni date di x, e nelle diverse funzioni $Z^{(y-1,x)}$, $Z^{(y-1,x-1)}$, ecc. la y può variare comunque, purchè però la sua variazione sia sempre una funzione di x.

Supponghiamo, che l' integrale cercato abbia questa forma:

$$Z^{(y,x)} = ma^y \nabla\underset{x}{\alpha} + nb^y \nabla\underset{x}{\beta} + pc^y \nabla\underset{x}{\gamma} + \text{ecc.}$$

ove le lettere m, n, p, ecc. a, b, c, ecc. esprimono quan-

(a) Il Sig. Cav. *Lorgna* è il primo, che abbia trattato delle funzioni ed equazioni differenziali finite a due variabili, supponendo le differenze di y funzioni della variabile x (Mem. della *Società Italiana* Tomo I. pag. 377, 388, 395 e segu.); ma non ha ancora pubblicato la continuazione delle sue ricerche sull' equazioni a più di due variabili, come s' è proposto di fare alla pag. 375.

tità costanti, α_x, β_x, γ_x, ecc. sono funzioni di x; $\nabla\alpha_x$ secondo la maniera di scrivere del Sig. *de la Place* rappresenta il prodotto $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_x$; in modo che sarà $\nabla\alpha_{x-1} = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_{x-1}$, e perciò $\nabla\alpha_x = \alpha_x \nabla\alpha_{x-1}$: il numero poi de' termini dell' integrale è indefinito. Sostituendo adunque nella equazione proposta in luogo di $Z^{(y,x)}$ il di lui valore, avremo

$$\begin{aligned}
ma^y\nabla\alpha_x = {} & mA_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_x + mB_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_x + \ldots \\
& + mX_x\, a^{y-x}\nabla\alpha_x + \ldots + mA'_x\, a^y\nabla\alpha_{x-1} \\
& + mB'_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_{x-1} + \ldots + mX'_x\, a^{y-x}\nabla\alpha_{x-1} + \ldots \\
+ nb^y\nabla\beta_x & + nA_x\, b^{y-1}\nabla\beta_x + nB_x\, b^{y-2}\nabla\beta_x + \ldots \\
& + nX_x\, b^{y-x}\nabla\beta_x + \ldots + nA'_x\, b^y\nabla\beta_{x-1} \\
& + nB'_x\, b^{y-1}\nabla\beta_{x-1} + \ldots + nX'_x\, b^{y-x}\nabla\beta_{x-1} + \ldots \\
+ pc^y\nabla\gamma_x & + pA_x\, c^{y-1}\nabla\gamma_x + pB_x\, c^{y-2}\nabla\gamma_x + \ldots \\
& + pX_x\, c^{y-x}\nabla\gamma_x + \ldots + pA'_x\, c^y\nabla\gamma_{x-1} \\
& + pB'_x\, c^{y-1}\nabla\gamma_{x-1} + \ldots + pX'_x\, c^{y-x}\nabla\gamma_{x-1} + \ldots \\
+ \text{ecc.} & + \text{ecc.}
\end{aligned}$$

Per soddisfare a questa equazione, ponghiamo

$$\begin{aligned}
ma^y\nabla\alpha_x = {} & mA_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_x + mB_x\, a^{y-2}\nabla\alpha_x + \ldots \\
& + mX_x\, a^{y-x}\nabla\alpha_x + \ldots + mA'_x\, a^y\nabla\alpha_{x-1} \\
& + mB'_x\, a^{y-1}\nabla\alpha_{x-1} + \ldots + mX'_x\, a^{y-x}\nabla\alpha_{x-1} + \ldots \\
nb^y\nabla\beta_x = {} & nA_x\, b^{y-1}\nabla\beta_x + nB_x\, b^{y-2}\nabla\beta_x + \ldots
\end{aligned}$$

$$+nX_x b^{y-x}\nabla\beta_x + \ldots + nA'_x b^y\nabla\beta_{x-1}$$

$$+nB'_x b^{y-1}\nabla\beta_{x-1} + \ldots + nX'_x b^{y-x}\nabla\beta_{x-1} + \ldots$$

$$pc^y\nabla\gamma_x = pA_x c^{y-1}\nabla\gamma_x + pB_x c^{y-2}\nabla\gamma_x + \ldots$$

$$+pX_x c^{y-x}\nabla\gamma_x + \ldots + pA'_x c^y\nabla\gamma_{x-1}$$

$$+pB'_x c^{y-1}\nabla\gamma_{x-1} + \ldots + pX'_x c^{y-x}\nabla\gamma_{x-1} + \ldots$$

ecc.

e ſiccome $\nabla\alpha_x = \alpha_x \nabla\alpha_{x-1}$, $\nabla\beta_x = \beta_x \nabla\beta_{x-1}$,

$\nabla\gamma_x = \gamma_x \nabla\gamma_{x-1}$, ecc. avremo

$$\alpha_x = \frac{A'_x + B'_x a^{-1} + \ldots + X'_x a^{-x} + \ldots}{1 - A_x a^{-1} - B_x a^{-2} - \ldots - X_x a^{-x} - \ldots}$$

$$\beta_x = \frac{A'_x + B'_x b^{-1} + \ldots + X'_x b^{-x} + \ldots}{1 - A_x b^{-1} - B_x b^{-2} - \ldots - X_x b^{-x} - \ldots}$$

$$\gamma_x = \frac{A'_x + B'_x c^{-1} + \ldots + X'_x c^{-x} + \ldots}{1 - A_x c^{-1} - B_x c^{-2} - \ldots - X_x c^{-x} - \ldots}$$

ecc.

e quindi ancora i valori di $\nabla\alpha_x$, $\nabla\beta_x$, $\nabla\gamma_x$, ecc.

2. Si riduca in ſerie diſcendente la quantità $\nabla\alpha_x$, lo che ſecondo i diverſi caſi potrà per i metodi cogniti farſi in diverſe maniere. In generale ponghiamo

$$\nabla\alpha_x = A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}$$

e prendendo i logaritmi avremo

$$l.\nabla x_x = l.(A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.})$$

Differenziando adesso nell' ipotesi di x costante, ed a variabile, sarà

$$\frac{-a^2 d\nabla x_x}{\nabla x_x \cdot da} = \frac{A' + 2A''a^{-1} + 3A'''a^{-2} + \text{ecc.}}{A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}}.$$

Ora, essendo ∇x_x una funzione fratta di a^{-1}, se cerchiamo le radici del numeratore e del denominatore di questa frazione, cioè i valori di a facendo l' uno e l' altro $= 0$; è facile il vedere, che posta $r =$ alla somma delle radici del denominatore meno quelle del numeratore, $r' =$ ai quadrati delle radici del denominatore meno quelli del numeratore, e in generale $r^{(m)} =$ alle potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici del denominatore meno le potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici del numeratore, avremo

$$\frac{-a^2 d\nabla x_x}{\nabla x_x \, d.a} = r + r'a^{-1} + r''a^{-2} + r'''a^{-3} + \text{ecc.}$$

Sarà dunque

$$r + r'a^{-1} + r''a^{-2} + r'''a^{-3} + \text{ecc.}$$
$$= \frac{A' + 2A''a^{-1} + 3A'''a^{-2} + \text{ecc.}}{A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}}.$$

Quindi si deduce

$$A' = Ar$$
$$2A'' = A'r + Ar'$$
$$3A''' = A''r + A'r' + Ar''$$
$$4A'''' = A'''r + A''r' + A'r'' + Ar'''$$
ecc.

La quantità A si determinerà ponendo $a = 0$ nella funzione ∇x_x. Dall' equazioni precedenti si rileva

$$\frac{A'}{A} = r$$
$$\frac{A''}{A} = \frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}$$

$$\frac{A'''}{A} = \frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}$$

$$\frac{A''''}{A} = \frac{r'''}{4} + r\frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4} + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}.$$

e in generale

$$\begin{aligned}\frac{A^{(m+1)}}{A} = {} & \frac{r^{(m)}}{m+1} + r\frac{r^{(m-1)}}{m+1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r^{(m-2)}}{m+1} + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3}\right. \\ & \left. + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r^{(m-3)}}{m+1} + \left(\frac{r'''}{4} + r\frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}\right. \\ & \left. + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\right)\frac{r^{(m-4)}}{m+1} \\ & + \left\{\frac{r''''}{5} + r\frac{r'''}{5} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r''}{5} + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3}\right.\right. \\ & \left. + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r'}{5} + \left(\frac{r'''}{4} + r\frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}\right. \\ & \left.\left. + \left(\frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\right)\frac{r}{5}\right\}\frac{r^{(m-5)}}{m+1} + \text{ecc.}\end{aligned}$$

Merita di essere osservata questa formola per la legge, che osservano tra di loro i di lei diversi termini. Il coefficiente del secondo termine si ha ponendo nel primo $m = 0$; il coefficiente del terzo facendo nel primo e nel secondo $m = 1$; e generalmente il coefficiente del termine $(\mu + 2)^{esimo}$ facendo ne' termini antecedenti $m = \mu$.

3. Abbiamo dunque

$$\nabla\alpha_{x} = A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}$$

ed è evidente che sarà similmente

$$\nabla\beta_{x} = A + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

$$\nabla\gamma_{x} = A + A'c^{-1} + A''c^{-2} + A'''c^{-3} + \text{ecc.}$$

ecc.

Dunque l' integrale cercato sarà

$$Z^{(y,x)} = mAa^y + mA'a^{y-1} + mA''a^{y-2} + mA'''a^{y-3} + \text{ecc.}$$
$$+ nAb^y + nA'b^{y-1} + nA''b^{y-2} + nA'''b^{y-3} + \text{ecc.}$$
$$+ pAc^y + pA'c^{y-1} + pA''c^{y-2} + pA'''c^{y-3} + \text{ecc.}$$
$$+ \text{ecc.}$$

Ma la quantità $ma^y + nb^y + pc^y +$ ecc. può rappresentare qualunque funzione di y; supponghiamo dunque che questa funzione di y sia $\phi . y$, ed avremo

$$Z^{(y,x)} = A\phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

La funzione $\phi . y$ è quella funzione arbitraria, che deve aver luogo nell' integrale della equazione proposta. Per determinarla conviene che sia dato il valore di $Z^{(y,0)}$, cioè il valore di $Z^{(y,x)}$, quando vi si fa $x = 0$, come più chiaramente vedremo ne' casi particolari.

4. Ecco adunque come si deve operare per aver l' integrale della proposta equazione. Si faccia $Z^{(y,x)} = b^y \nabla \alpha_x$, e sostituendo questo valore di $Z^{(y,x)}$ nella proposta, se ne dedurrà il valore di α_x, e quindi quello di $\nabla \alpha_x$. Si riduca $\nabla \alpha_x$ nella serie $A + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} +$ ecc. e si avrà subito l' integrale cercato così espresso:

$$Z^{(y,x)} = A\phi . y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

5. Per applicare l' esposta Teoria ai casi particolari, cerchiamo il termine generale di alcune di quelle serie, che il Sig. *de la Place* ha chiamate *ricorro-ricorrenti*. Le serie di questa specie, che sono state finora trattate, erano tali, che un termine qualunque dipendeva con una certa legge da altri antecedenti sempre ugualmente remoti da quello: nelle serie, delle quali siamo per parlare, un termine dipende con una certa legge da altri sempre disugualmente distanti da quello.

PROBLEMA I.

6. *Trovare il termine generale della serie*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 . . . . y
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
4	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84
5	0	0	0	0	0	0	1	5	15	35 . . . .
x										

In questa serie ciascun termine dipende da altri due in modo, che è uguale alla somma del termine precedente della medesima linea orizzontale, e di quel termine della fila antecedente, il di cui posto è distante di $x-2$ unità dal numero proposto. Così nella quinta fila, ove $x=5$, ciascun numero, come il 35, è uguale al numero precedente 15 + quel numero che nella fila antecedente è nel terzo posto avanti il 35, che in questo caso è il 20. Sia $Z^{(y,x)}$ il termine generale di questa serie, e per le condizioni del Problema avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-1,x)} + Z^{(y-x+2,x-1)}$$

Ponghiamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x = b^{-1}\alpha_x + b^{-x+2}$,

cioè $\alpha_x = \frac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_x = \frac{b^1.b^0.b^{-1}.b^{-2}\ldots.b^{-x+2}}{(1-b^{-1})^x}$

$= \frac{b^{-x(x-3):2}}{(1-b^{-1})^x}$. Si riduca in serie per mezzo del Teorema *Newtoniano* la quantità $\frac{1}{(1-b^{-1})^x}$, e si avrà

$$\nabla\alpha_x = b^{-x(x-3):2} + xb^{-x(x-3):2-1} + \frac{x(x+1)}{2}\, b^{-x(x-3):2-2} + \text{ecc.}$$

Onde per le cose precedenti sarà (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2}\right) + x\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - 1\right) + \frac{x(x+1)}{2}\,\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Adesso per determinare la funzione arbitraria $\phi.y$, facciamo $x=0$, ed avremo $Z^{(y,0)}=\phi.y$. Dunque $\phi.y$ è ciò che diviene $Z^{(y,x)}$, quando vi si fa $x=0$. Ma noi non conosciamo il valore di $Z^{(y,0)}$; onde converrà dedurre il valore di questa funzione da quello di $Z^{(y,1)}$, il quale è espresso dalla prima linea orizzontale della serie proposta. Bisogna prima osservare, che continuando la serie dalla parte sinistra, cioè dando ad y i valori 0, -1, -2, ecc., i valori di $Z^{(y,1)}$ diverranno tutti $=0$, cioè sarà $Z^{(0,1)}=0$, $Z^{(-1,1)}=0$, $Z^{(-2,1)}=0$, ecc. In fatti ponendo nella equazione del problema x successivamente $=2$, 3, ecc., ed $y=0$, 1, 2, ecc. avremo

$$Z^{(0,1)}=Z^{(0,2)}-Z^{(-1,2)} \qquad Z^{(-1,2)}=Z^{(0,3)}-Z^{(-1,3)}$$
$$Z^{(0,2)}=Z^{(1,3)}-Z^{(0,3)} \qquad Z^{(-1,3)}=Z^{(1,4)}-Z^{(0,4)}$$
$$Z^{(0,3)}=Z^{(2,4)}-Z^{(1,4)} \qquad Z^{(0,4)}=Z^{(3,5)}-Z^{(2,5)}$$
$$\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.}$$

Ora $Z^{(2,4)}=0$, e $Z^{(1,4)}=0$; dunque $Z^{(0,3)}=0$: quindi siccome $Z^{(1,3)}=0$, sarà $Z^{(0,2)}=0$. Così, siccome $Z^{(3,5)}$ e $Z^{(2,5)}$ sono $=0$, sarà $Z^{(0,4)}=0$, $Z^{(-1,3)}=0$, $Z^{(-1,2)}=0$, e perciò $Z^{(0,1)}=0$. Nella medesima maniera si dimostrerà essere uguali a zero tutt' i valori di $Z^{(y,1)}$, quando y è negativa.

Adesso, se facciamo $x=1$, avremo $Z^{(y,1)}=Z^{(y-1,1)}+Z^{(y+1,0)}$. cioè $Z^{(y,0)}=Z^{(y-1,1)}-Z^{(y-2,1)}$; e quindi

$$Z^{(0,0)}=Z^{(-1,1)}-Z^{(-2,1)}=0$$
$$Z^{(1,0)}=Z^{(0,1)}-Z^{(-1,1)}=0$$
$$Z^{(2,0)}=Z^{(1,1)}-Z^{(0,1)}=1$$
$$Z^{(3,0)}=Z^{(2,1)}-Z^{(1,1)}=0$$
$$\text{ecc.}$$

Di qui apparisce, che la funzione $Z^{(y,0)}$ è $=1$ nel solo caso di $y=2$; negli altri casi è sempre $=0$. Se adunque facciamo $y-\frac{x(x-3)}{2}-m=2$, sarà

$\phi\left(y-\frac{x(x-3)}{2}-m\right)=1$, e $Z^{(y,x)}$ sarà uguale al coefficiente del termine $\phi\left(y-\frac{x(x-3)}{2}-m\right)$, poichè gli altri

termini della ſerie ſvaniſcono. Eſſendo $m = y - \frac{x(x-3)}{2} - 2$, ſi troverà queſto coefficiente uguale a

$$\frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots x+y-\frac{x(x-3)}{2}-3}{1.2.3\ldots\ldots(y-\frac{x(x-3)}{2}-2)},$$ e la funzione ricercata $Z^{(y,x)}$, o ſia il termine generale della ſerie propoſta

$$= \frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots x+y-\frac{x(x-3)}{2}-3}{1.2.3\ldots\ldots(y-\frac{x(x-3)}{2}-2)}.$$ Per eſempio ſupponendo $y = 10$, $x = 5$, avremo il decimo termine della quinta fila $= \frac{5.6.7}{1.2.3} = 35$, come appunto è nella ſerie.

7. La funzione arbitraria introdotta nell' integrale della equazione propoſta ſi è trovata eſſere $Z^{(y,0)}$; ſe vogliamo invece introdurvi la funzione $Z^{(y,1)}$, che data dalla prima linea della ſerie, baſterà fare $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_{x-1}$, ſupponendo

$\nabla\alpha_{x-1} = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_{x-1}$. Perchè avremo $\alpha_{x-1} = b^{-1}\alpha_{x-1} + b^{-x+2}$, cioè $\alpha_{x-1} = \frac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_{x-1} = \frac{b^0 . b^{-1} . b^{-2} \ldots . b^{-x+2}}{(1-b^{-1})^{x-1}}$

$= \frac{b^{-(x-1)(x-2):2}}{(1-b^{-1})^{x-1}}$, o ſia $\nabla\alpha_{x-1} = b^{-(x-1)(x-2):2}$

$+ (x-1)b^{-(x-1)(x-2):2-1} + \frac{(x-1)x}{2} b^{-(x-1)(x-2):2-2} +$ ecc. e quindi (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2}\right) + (x-1)\,\phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 1\right)$$
$$+ \frac{(x-1)x}{2}\,\phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$, abbiamo $\phi . y = Z^{(y,1)}$, cioè $\phi . y = 1$, ſe y

è positiva, $c=0$, se y è zero o negativa. Avremo dunque

$$Z^{(y,x)}=1+(x-1)+\frac{(x-1)x}{2}+\frac{(x-1)x(x+1)}{2.3}+\ldots$$

$$+\frac{(x-1)x\ldots\ldots\left(x+y-\frac{(x-1)(x-2)}{2}-3\right)}{2\ldots\ldots\left(y-\frac{(x-1)(x-2)}{2}-1\right)},$$ la quale

espressione combina coll' altra superiormente ritrovata.

8. Similmente, se si vorrà nell' integrale introdurre la funzione $Z^{(y,2)}$, basterà supporre $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_{x-2}$. Perchè sostituendo si avrà $\alpha_{x-2}=b^{-1}\alpha_{x-2}+b^{-x+2}$, cioè $\alpha_{x-2}=\frac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}$,

e $\nabla\alpha_{x-2}=\frac{b^{-(x-2)(x-1):2}}{(1-b^{-1})^{x-2}}$, cioè riducendo questo valore in serie

$$\nabla\alpha_{x-2}=b^{-(x-2)(x-1):2}+(x-2)b^{-(x-2)(x-1):2-1}$$

$$+\frac{(x-2)(x-1)}{2}b^{-(x-2)(x-1):2-2}+\text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)}=\phi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}\right)+(x-2)\phi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-1\right)$$

$$+\frac{(x-2)(x-1)}{2}\phi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-2\right)+\text{ecc.}$$

Facendo $x=2$, si ha $\phi y=Z^{(y,2)}$, cioè $\phi y=y$, quando y è positiva, $e=0$, quando y è zero o negativa. Quindi sarà

$$Z^{(y,x)}=y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}+(x-2)\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-1\right)$$

$$+\frac{(x-2)(x-1)}{2}\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-2\right)+\text{ecc.}$$

finchè si giunga ad un termine uguale a zero. Di qui si vede, come introdur si possa nell' integrale che si cerca qualunque altra funzione espressa da una linea orizzontale della serie. E questo ha luogo generalmente, qualunque sia l' equazione, che si voglia integrare.

PROBLEMA II.

9. *Trovare il termine generale della serie*

	1	2	3	4	5	6	7	8 . . . y
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	3	7	15	31	63	127
3	0	0	0	1	6	25	90	301
4	0	0	0	0	0	0	1	10 . . . . .
:								
x								

In questa serie ciascun termine è uguale al termine precedente della medesima linea moltiplicato per x, più quel termine della linea antecedente, il di cui posto è distante di $x-1$ unità. Per esempio il termine 90 della terza fila, che corrisponde a $y=7$, è $=3.\ 25+15$, ove il 15 è quel termine che nella fila precedente corrisponde ad $y-x+1=7-2=5$. Supponghiamo che il termine generale di questa serie sia $Z^{(y,x)}$, ed avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)}=x\,Z^{(y-1,x)}+Z^{(y-x+1,x-1)}$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_x$, e l' equazione proposta diventerà

$$\alpha_x=xb^{-1}\alpha_x+b^{-x+1},\ \text{cioè}\ \alpha_x=\frac{b^{-x+1}}{1-xb^{-1}},\ \text{e perciò}$$

$$\Delta\alpha_x=\frac{b^{-x(x-1):2}}{(1-b^{-1})(1-2b^{-1})(1-3b^{-1})\dots(1-xb^{-1})}.\ \text{Ponghia-}$$

$$\text{mo}\ \frac{1}{(1-b^{-1})(1-2b^{-1})\dots(1-xb^{-1})}=A+A'b^{-1}+A''b^{-2}+A'''b^{-3}+\text{ecc.}$$

ed è chiaro essere $A=1$. Le radici del denominatore sono $1,\ 2,\ 3,\dots x$: dunque facendo (2)

$$r=1+2+3+\dots\dots+x$$
$$r'=1^2+2^2+3^2+\dots\dots+x^2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$r^{(m)}=1^{m+1}+2^{m+1}+3^{m+1}+\dots+x^{m+1}$$

avremo

$$A'=r$$

$$A' = \frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}$$

$$A''' = \frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}$$

ed in generale

$$A^{(m+1)} = \frac{r^{(m)}}{m+1} + r\frac{r^{(m-1)}}{m+1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r^{(m-2)}}{m+1} + \text{ecc.}$$

come ſopra (2). Quindi avremo

$$\nabla\alpha_x = b^{-x(x-1):2} + rb^{-x(x-1):2-1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)b^{-x(x-1):2-2} + \text{ecc.}$$

e perciò ſarà (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2}\right) + r\phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2} - 1\right)$$
$$+ \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 0$, è chiaro che ſarà $r = r' = r'' = \text{ecc.} = 0$; dunque $Z^{(y,0)} = \phi y$. Per trovare il valore di $Z^{(y,0)}$, il quale non è dato dalla ſerie propoſta, facciamo nella equazione del problema $x = 1$, ed avremo $Z^{(y,1)} = Z^{(y-1,1)} + Z^{(y,0)}$. Ora è facile il vedere, come nel Problema I., che ſarà $Z^{(y,1)} = 0$ ſe y è zero o negativa. Quindi ſarà $Z^{(1,0)} = Z^{(1,1)} - Z^{(0,1)} = 1$, $Z^{(2,0)} = Z^{(2,1)} - Z^{(1,1)} = 0$, e così tutti gli altri valori di $Z^{(y,0)} = 0$, fuorchè il ſolo $Z^{(1,0)}$. Dunque la ricercata funzione $Z^{(y,x)} =$ a quel termine che nella ſerie è coefficiente di $\phi 1$. Sia $m+2$ il poſto che occupa nella ſerie queſto termine, cioè ſia $A^{(m+1)}$ il coefficiente di $\phi . 1$, ed avremo $y - \frac{x(x-1)}{2} - m - 1 = 1$, cioè $m + 1 = y - \frac{x(x-1)}{2} - 1$. Se adeſſo eſprimiamo col ſegno Sx^m la ſomma della ſerie $1 + 2^m + 3^m + \ldots + x^m$, ſarà il termine generale cercato

$$Z^{(y,x)} = \frac{Sx^{y-x(x-1):2-1}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + Sx . \frac{Sx^{y-x(x-1):1-2}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + \left(\frac{Sx^2}{2}\right.$$

$$+ Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx^{y-x(x-1):2-3}}{y-\frac{x(x-1)}{2}-1}+\Big(\frac{Sx^3}{3}+Sx.\frac{Sx^2}{3}+\Big(\frac{Sx^2}{2}$$

$$+ Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx}{3}\Big)\frac{Sx^{y-x(x-1):2-4}}{y-\frac{x(x-1)}{2}-1}+\text{ecc.}$$

nella quale espressione il coefficiente del termine $(m+1)^{esimo}$ si trova ponendo ne' termini precedenti $y-\frac{x(x-1)}{2}-1=m$.

Supponghiamo per esempio che si voglia sapere, qual termine corrisponda ad $x=3$, $y=8$, cioè il valore di $Z^{(8,3)}$; avremo

$$Z^{(8,3)}=\frac{Sx^4}{4}+Sx.\frac{Sx^3}{4}+\Big(\frac{Sx^2}{2}+Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx^2}{4}+\Big(\frac{Sx^3}{3}$$

$$+Sx.\frac{Sx^2}{3}+\Big(\frac{Sx^2}{2}+Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx}{3}\Big)\frac{Sx}{4}=\frac{98}{4}+\frac{6.36}{4}$$

$$+(7+18)\frac{14}{4}+\big(12+2.14+(7+18)2\big)\frac{6}{4}$$

$$=\frac{1204}{4}=301 \text{ come nella figura.}$$

PROBLEMA III.

10. *Trovare il termine generale della serie*

	1	2	3	4	5	6	7 . . . . y
1	1	2	4	8	16	32	64
2	1	5	16	44	112	272	640
3	1	9	45	171	558	1656	4610
4	1	14	103	540	2295	8478	29379 . . . .
:							
x							

La legge, che osservano tra di loro i termini di questa serie, è espressa dall' equazione

$$Z^{(y,x)}=2Z^{(y-1,x)}+Z^{(y,x-1)}+(x-1)Z^{(y-1,x-1)}$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)}{2}Z^{(y-2,x-1)}+\dots+Z^{(y-x+1,x)}$$

In

In questa equazione non solo sono variabili le differenze di y, ma è ancora variabile il numero de' termini. Facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla \alpha_x$, e sostituendo avremo

$$\alpha_x = 2b^{-1}\alpha_x + 1 + (x-1)b^{-1} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} b^{-2} + \ldots + b^{-x+1}$$

cioè $\alpha_x = \frac{(1+b^{-1})^{x-1}}{1-2b^{-1}}$, e $\nabla \alpha_x = \frac{(1+b^{-1})^{x(x-1):2}}{(1-2b^{-1})^x}$. Sia

$$\frac{(1+b^{-1})^{x(x-1):2}}{(1-2b^{-1})^x} = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

e differenziando logaritmicamente avremo

$$\frac{x(x-1)}{2(1+b^{-1})} + \frac{2x}{1-2b^{-1}} = \frac{A' + 2A''b^{-1} + 3A'''b^{-2} + \text{ecc.}}{1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}}$$

Ma riducendo in serie il primo membro abbiamo

$$\frac{x(x-1)}{2(1+b^{-1})} + \frac{2x}{1-2b^{-1}} = \frac{x(x-1)}{2}(1 - b^{-1} + b^{-2} - b^{-3} + \text{ecc.})$$
$$+ 2x(1 + 2b^{-1} + 4b^{-2} + 8b^{-3} + \text{ecc.})$$
$$= \frac{x(x+3)}{2} - \frac{x(x-9)}{2} b^{-1} + \frac{x(x+15)}{2} b^{-2}$$

$- \frac{x(x-33)}{2} b^{-3} + \text{ecc.}$ Dunque (2) $r = \frac{x(x+3)}{2}$,

$r' = -\frac{x(x-9)}{2}$, $r'' = \frac{x(x+15)}{2}$, e generalmente

$r^{(m)} = \pm \frac{x(x \pm 2^{m+2} - 1)}{2}$, ove il segno superiore vale nel caso di m pari, l' inferiore nel caso di m dispari. Quindi avremo

$$A' = \frac{x(x+3)}{2}$$

$$A'' = -\frac{x(x-9)}{2} + \frac{x(x+3)}{2} \cdot \frac{x(x+3)}{2.2}$$

e in generale

$$A^{(m-1)} = \pm \frac{x(x \pm 2^m - 1)}{2(m-1)} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \cdot \mp \frac{x(x \mp 2^{m-1} - 1)}{2(m-1)}$$

$$+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\cdot\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)$$
$$\pm\frac{x(x\pm 2^{m-2}-1)}{2(m-1)}+\left(\frac{x(x+2^4-1)}{2.3}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$
$$\cdot-\frac{x(x-2^3-1)}{2.3}+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\cdot\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)\frac{x(x+2^2-1)}{2.3}\right)$$
$$\mp\frac{x(x\mp 2^{m-3}-1)}{2(m-1)}+\text{ecc.}$$

Determinate in questa maniera le quantità A', A'', ecc., avremo
$Z^{(y,x)}=\phi y+A'\phi(y-1)+A''\phi(y-2)+A'''\phi(y-3)+$ ecc. Facendo $x=0$, abbiamo $A'=A''=$ ecc. $=0$; dunque $\phi y=Z^{(y,0)}$. Per trovare il valore di questa funzione, ponghiamo nella equazione del problema $y=1, 2, 3$, ecc.; $x=2, 3$, ecc.; ed avremo

$$Z^{(1,2)}=2Z^{(0,2)}+Z^{(1,1)}+Z^{(0,1)}$$
$$Z^{(2,3)}=2Z^{(1,3)}+Z^{(2,2)}+2Z^{(1,2)}+Z^{(0,2)}$$
ecc.

Quindi $Z^{(0,1)}=-2Z^{(0,2)}$, e $Z^{(0,2)}=0$, e così in generale $Z^{(0,x)}=0$. Adesso facendo $y=0, 1$, ecc.; $x=2, 3$, ecc. sarà

$$Z^{(0,2)}=2Z^{(-1,2)}+Z^{(0,1)}+Z^{(-1,1)}$$
$$Z^{(1,3)}=2Z^{(0,3)}+Z^{(1,2)}+2Z^{(0,2)}+Z^{(-1,2)}$$
ecc.

e perciò $Z^{(-1,1)}=-2Z^{(-1,2)}$, $Z^{(-1,2)}=0$, e generalmente $Z^{(-1,x)}=0$. Nell' istessa maniera si vedrà, che $Z^{(y,1)}$ è sempre $=0$ nel caso di y negativa. Ponghiamo adesso nella equazione proposta $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=2Z^{(y-1,1)}+Z^{(y,0)}$: dunque $Z^{(y,0)}$ è $=1$ nel solo caso di $y=1$; negli altri casi $Z^{(y,0)}=0$, e perciò $Z^{(y,x)}$ è $=$ al coefficiente di $\phi.1$. Sia $A^{(m-1)}$ questo coefficiente, avremo $y-m+1=1$, cioè $m=y$. Quindi sarà

$$Z^{(y,x)}=\pm\frac{x(x\pm 2^{y}-1)}{2(y-1)}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\mp\frac{x(x\mp 2^{y-1}-1)}{2(y-1)}$$

$$+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\cdot\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)$$

$$\pm\frac{x(x\pm 2^{y-2}-1)}{2(y-1)}+\left(\frac{x(x+2^4-1)}{2.3}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$

$$\cdot-\frac{x(x-2^3-1)}{2.3}+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)\frac{x(x+2^2-1)}{2.3}\right)\mp\frac{x(x\mp 2^{y-3}-1)}{2(y-1)}\quad+\text{ecc.}$$

Di questa ferie si devono prender $y-1$ termini; la ferie poi è tale, che si ottiene il coefficiente del secondo termine facendo nel primo $y=2$, il coefficiente del terzo facendo nel primo e nel secondo $y=3$, ecc. Il segno superiore si prende se y è pari, l' inferiore se y, è dispari.

Cerchiamo per esempio il termine quinto della quarta fila, cioè quello che corrisponde ad $y=5$, $x=4$; avremo

$$z^{(5,4)}=\frac{29}{2}+\frac{14.19}{2}+(5+14.7)\frac{5}{2}+\left(\frac{38}{3}+\frac{14.10}{3}\right.$$
$$\left.+(5+14.7)\frac{14}{3}\right)\frac{7}{2}=2295.$$

Articolo II.

Riflessioni intorno ai metodi dei Signori de la Grange *e* de la Place *per integrare l' equazioni a differenze finite e parziali.*

11. In questo articolo io mi son proposto di mostrare qual rapporto abbia il mio metodo con quello del Sig. *de la Grange*, il quale me ne ha fatta nascere l' idea; come ancora di far vedere, che il metodo del Sig. *de la Place* può applicarsi felicemente a quella specie di equazioni, che abbiamo nell' articolo precedente considerate. Si abbia adunque l' equazione

$$z^{(y,x)}=Az^{(y-1,x)}+Bz^{(y-2,x)}+Cz^{(y-3,x)}+\ldots+Mz^{(y-n,x)}$$
$$+A'z^{(y,x-1)}+B'z^{(y-1,x-1)}+C'z^{(y-2,x-1)}+\ldots.$$
$$+M'z^{(y-n,x-1)}$$

Supponghiamo $z^{(y,x)}=b^y\phi.x$, ove ϕx esprime una funzione

di x, b è una quantità costante. Sostituito questo valore avremo dividendo per b^y

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - Cb^{-3} - \ldots - Mb^{-n})\varphi x$$
$$= (A' + B'b^{-1} + C'b^{-2} + \ldots + M'b^{-n})\varphi(x - 1).$$

Questa è una equazione a differenze ordinarie, l' integrazione della quale ci darà il valore di φx. Ora se A, B, ecc. A', B', ecc. sono quantità costanti, ed n similmente è costante, sarà $\varphi . x = \alpha^x$, e per determinare la quantità costante α avremo l' equazione

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - \ldots - Mb^{-n})\alpha = A' + B'b^{-1} + C'b^{-2} + \ldots + M'b^{-n}.$$

Questo è il caso, che considera il Sig. *de la Grange*, e da ciò che abbiamo detto apparisce l' origine della sostituzione che egli adopra, cioè $z^{(y,x)} = m\alpha^x b^y$.

12. Ma se n è una funzione di x, come nel nostro caso, allora o siano o non siano costanti le quantità A, B, ecc. A', B', ecc. siccome i coefficienti della equazione precedente sono variabili, sarà com' è noto $\varphi x = \nabla \alpha_x$, essendo α_x una funzione di x, per determinar la quale avremo l' equazione

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - \ldots - Mb^{-n})\alpha_x = A' + B'b^{-1} + \ldots + M'b^{-n}.$$

Ed ecco l' origine di quella sostituzione, che abbiamo usata di sopra, cioè $z^{(y,x)} = mb^y \nabla \alpha_x$.

13. Se poi sarà n costante, ma le quantità A, B, ecc. saranno funzioni di x, avremo di nuovo $\varphi . x = \nabla \alpha_x$, e la nostra sostituzione condurrà felicemente alla integrazione dell' equazioni a differenze finite e parziali e a coefficienti variabili. Convien però intendere dell' equazioni simili nella forma a quella del n°. 11, nella quale la variabile x in ciascun termine non varia che di una unità. Perchè per l' equazioni de' gradi superiori, $\varphi . x$ sarebbe data da una equazione a differenze ordinarie de' gradi superiori, la quale com' è noto non si integrarsi, che in alcuni casi particolari. Ma con ulteriori artifizj si potrà anche superare questa difficoltà, e partendo dalla supposizione, $z^{(y,x)} = b^y \varphi x$ giungere

alla integrazione generale di queſt' equazioni. Noi ci riſerbiamo un' altra volta a continuare queſte rifleſſioni, perchè l' integrazione di quell' equazioni, che abbiamo nell' articolo primo conſiderate, ci baſta per l' oggetto principale, il quale ci ſiamo propoſto in queſte ricerche, cioè per riſolvere i problemi relativi alla *partizione de' numeri*. Solo avvertiremo, che queſte poche oſſervazioni ſembra che diano intanto una maggior generalità all' elegantiſſimo metodo del Sig. *de la Grange*.

14. Il metodo del Sig. *de la Place* può applicarſi a quell' equazioni, che abbiamo di ſopra trattate. Si abbia per eſempio l' equazione

$$(a)\quad Z^{(y,x)} = A_x Z^{(y-1,x)} + B_x Z^{(y-x,x-1)}$$

e quello che diremo di queſta equazione potrà a qualunque altra applicarſi. Eliminiamo da queſta equazione il termine $Z^{(y-x,x-1)}$, e ſiccome abbiamo

$$B_x Z^{(y-x,x-1)} = B_x A_{x-1} Z^{(y-x-1,x-1)} + B_x B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)}$$

ſoſtituendo avremo

$$(b)\quad \begin{array}{l} Z^{(y,x)} - A_x Z^{(y-1,x)} \\ - A_{x-1}(Z^{(y-1,x)} - A_x Z^{(y-2,x)}) \end{array} = B_x B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)}$$

Si oſſervi, che ſe il ſecondo membro di queſta equazione foſſe $=0$, il primo rappreſenterebbe una equazione a differenze ordinarie; onde ponendo $Z^{(y,x)} = f^y$, e dividendo per f^y ſi avrebbe $1 - \frac{A_x}{f} - \frac{A_{x-1}}{f}\left(1 - \frac{A_x}{f}\right) = \left(1 - \frac{A_x}{f}\right)\left(1 - \frac{A_{x-1}}{f}\right) = 0$, cioè ſarebbe $f = A_x$, $f = A_{x-1}$, e $Z^{(y,x)} = mA_x^y + m'A_{x-1}^y$, ove m ed m' ſono funzioni di x, perchè x ſi è ſuppoſta coſtante.

Eliminiamo adeſſo dalla equazione (b) il termine $Z^{(y-2x+1,x-2)}$, e ſiccome abbiamo dalla equazione (a)

$$B_x . B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)} = B_x . B_{x-1} . A_{x-2} Z^{(y-2x,x-2)}$$

$+B_x \cdot B_{x-1} \cdot B_{x-2} \, Z^{(y-3x+2,\, x-3)}$

soſtituendo avremo

$$(c)\quad Z^{(y,x)} - A_x Z^{(y-1,x)} = B_x \cdot B_{x-1} \cdot B_{x-2} \cdot Z^{(y-3x+2,\, x-3)}$$
$$- A_{x-1} \left(Z^{(y-1,x)} - A_x Z^{(y-2,x)} \right)$$
$$- A_{x-2} \left(Z^{(y-1,x)} - A_x Z^{(y-2,x)} - A_{x-1} \left(Z^{(y-2,x)} - A_x Z^{(y-3,x)} \right) \right)$$

Qui pure, ſe il ſecondo membro foſſe $=0$, avremmo ſoſtituendo nel primo f^y in luogo di $Z^{(y,x)}$, avremmo io dico $\left(1-\frac{A_x}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-2}}{f}\right)=0$; dunque ſarebbe $Z^{(y,x)} = mA^y_x + m'A^y_{x-1} + m''A^y_{x-2}$.

Seguitando ad eliminare nella iſteſſa maniera, troveremo finalmente

$$Z^{(y,x)} - A_x Z^{(y-1,x)} = B_x \cdot B_{x-1} \ldots B_2 \, Z^{(y-\text{ecc.},\, 1)}$$
$$- A_{x-1} \left(Z^{(y-1,x)} - A_x Z^{(y-2,x)} \right)$$
$$- \text{ecc.}$$

e ſoſtituendo nel primo membro f^y in luogo di $Z^{(y,x)}$, e dividendo per f^y, eſſo diventerà $\left(1-\frac{A_x}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-2}}{f}\right)\ldots\left(1-\frac{A_2}{f}\right)$. Ora ſupponghiamo che la funzione $Z^{(y,1)}$ ſia data dalla equazione $Z^{(y,2)} = CZ^{(y-1,1)}$ ed avremo dopo di aver fatto le ſoſtituzioni opportune $\left(1-\frac{A_x}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{x-1}}{f}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{A_2}{f}\right) = \frac{C}{f}\left(1-\frac{A_x}{f}\right)\ldots\left(1-\frac{A_2}{f}\right)$, cioè $\left(1-\frac{C}{f}\right)$

$(1-\frac{A_2}{f})(1-\frac{A_3}{f})\ldots\ldots(1-\frac{A_x}{f})=0$. Dunque $f=C$, $=A_2$, $=A_3 \ldots =A_x$, e l' integrale della equazione proposta $Z^{(y,x)}=mC^y+m'A_2^y+\ldots+m^{(x)}A_x^y$. Le quantità m, m' ecc. sono funzioni di x, per determinar le quali si sostituirà nella equazione proposta il valore trovato di $Z^{(y,x)}$.

15. E' chiaro che l' istesso può dirsi di qualunque equazione: cioè sarà l' integrale di essa $Z^{(y,x)}=mf^y+m'f'^y$ $m''f''^y+$ ecc. Per trovare le quantità f, f', f'', ecc. si prendano dall'equazione data quei termini, che sono funzioni di x, lasciando da parte quei che sono funzioni di $x-1$. Si ponga in quelli $Z^{(y,x)}=f^y$, e dividendo per f^y si faccia x successivamente $=1, 2, 3, \ldots x$; dalle quantità che ne nasceranno uguagliate a zero si prendano i valori di f, che saranno i ricercati valori di f, f', f'', ecc. Le funzioni m, m', m'', ecc. si determineranno sostituendo l' integrale trovato nella equazione data. Ho supposto che nella equazione proposta non vi siano che le funzioni di x, e di $x-1$: ma il metodo è generale per qualunque caso. Si veda la Memoria del Sig. *de la Place*

16. Per applicare questo metodo a qualche caso particolare, prendiamo ad integrare l' equazione del n°. 6, dove abbiamo $Z^{(y,1)}=Z^{(y-1,1)}$, e

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-1,x)}+Z^{(y-x+2,x-1)}$$

Ne' due termini $Z^{(y,x)}-Z^{(y-1,x)}$ facciamo $Z^{(y,x)}=f^{y-1}$, e dividendo per f^{y-1} avremo $1-\frac{1}{f}$; sostituiamo in questa quantità $1, 2, 3 \ldots x$ in luogo di x, ed avremo $(1-\frac{1}{f})^x$ per determinare f. Questa equazione dà x valori di f uguali all' unità; dunque l' integrale sarà della forma

$$Z^{(y,x)}=A_x\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-1)}+B_x\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$+C_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+3)}{1.2\ldots(x-3)}$ + ecc. (Si vedano le Memorie de' Signori *de la Place* e *de la Grange*).

Per determinare le funzioni A_x, B_x, ecc. fostituiamo il valore di $Z^{(y,x)}$ nella equazione data, ed avremo

$$A_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-1)} + B_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$$+C_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+3)}{1.2\ldots(x-3)} + \text{ecc.}$$

$$= A_x \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x)}{1.2\ldots(x-1)} + B_x \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$$+C_x \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-3)} + \text{ecc.}$$

$$+A_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots(x-2)} + B_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots(x-3)}$$

$+C_{x-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+6)}{1\ldots(x-4)}$ + ecc. Ma è evidente che

$$\frac{(y-1)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-1)} = \frac{(y-2)\ldots(y-x)}{1\ldots(x-1)} + \frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)},$$

così pure $\frac{(y-1)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-2)} = \frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)}$

$+\frac{(y-2)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-3)}$; ecc. Dunque fostituendo questi valori avremo

$$A_x \frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)} + B_x \frac{(y-2)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-3)}$$

$$+C_x \frac{(y-2)\ldots(y-x+3)}{1\ldots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$= A_{x-1}$

$$= A_{x-1} \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+4)}{1\dots(x-2)} + B_{x-1} \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+5)}{1\dots(x-3)}$$

$$+ C_{x-1} \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+6)}{1\dots(x-4)} + \text{ecc.}$$

Ora è facile il vedere che

$$\frac{(y-2)\dots(y-x+1)}{1\dots(x-2)} = \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+4)}{1\dots(x-2)}$$

$$+ (x-3)\frac{(y-x+1)\dots(y-2x+5)}{1\dots(x-3)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2} \cdot \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+6)}{1\dots(x-4)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2.3} \cdot \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+7)}{1\dots(x-5)} + \text{ecc.}$$

Similmente $\frac{(y-2)\dots(y-x+2)}{1\dots(x-3)} = \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+5)}{1\dots(x-3)}$

$$+ (x-3)\frac{(y-x+1)\dots(y-2x+6)}{1\dots(x-4)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2} \cdot \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+7)}{1\dots(x-5)} + \text{ecc. ; e}$$

così in ſeguito. Soſtituendo tutti queſti valori avremo

$$A_x \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+4)}{1\dots(x-2)} + (x-3) A_x \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+5)}{1\dots(x-3)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2} A_x \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+6)}{1\dots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$+ B_x \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+5)}{1\dots(x-3)} + (x-3) B_x \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+6)}{1\dots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$+ C_x \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+6)}{1\dots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$= A_{x-1} \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+4)}{1\dots(x-2)} + B_{x-1} \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+5)}{1\dots(x-3)}$$

$+ C_{x-2} \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+6)}{1\dots(x-4)} +$ ecc. Quindi sarà

$A_x - A_{x-1} = 0$, $B_x - B_{x-1} = -(x-3) A_x$,

$C_x - C_{x-1} = -\frac{(x-3)(x-4)}{2} A_x - (x-3) B_x$,

$D_x - D_{x-1} = -\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2.3} A_x$

$-\frac{(x-3)(x-4)}{2} B_x - (x-3) C_x$; ecc. Convien dunque integrare quest' equazioni; ora si osservi che la prima non comincia ad aver luogo, che quando x è maggiore di 1; la seconda non ha luogo che quando x è maggiore di 2, e così delle altre. Posto questo la prima equazione ci dà $A_x =$ Cost. Per determinar questa costante facciamo $x = 1$, ed avremo $Z^{(y,1)} = A_x =$ Cost; ma ponendo $y = 1$ abbiamo $Z^{(1,1)} = 1$; dunque $A_x = 1$. La seconda equazione $B_x - B_{x-1} = -(x-3)$ integrata ci dà

$B_x = -\frac{(x-3)(x-2)}{2} +$ Cost. Per determinar la costante facciamo nell' integrale $x = 2$, ed avremo $Z^{(y,2)} = y - 1 +$ Cost; e ponendo $y = 1$, abbiamo $Z^{(1,2)} = 1 = 1 - 1 +$ Cost; dunque $B_x = 1 - \frac{(x-3)(x-2)}{2}$.

Nell' istesso modo troveremo $C_x = \frac{(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{2.4}$, e così delle altre.

Ma siccome non si vede bastantemente la legge, che osservano tra di loro le funzioni A_x, B_x, C_x, ecc. cerchiamo

un' altra maniera di esprimere l' integrale dell' equazione data. Questo integrale può essere ancora della forma seguente

$$z^{(y,x)} = A_x \frac{(y-X)(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1\ .\ 2\ldots\ldots(x-1)}$$

$$+ B_x \frac{(y-X)(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1\ .\ 2\ldots\ldots(x-2)} + \text{ecc.}$$

ove X è una funzione di x, che determineremo in appresso. Si sostituisca nella equazione data questo valore di $z^{(y,x)}$, e si avrà

$$A_x \frac{(y-X)(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1\ .\ 2\ldots\ldots(x-1)}$$

$$+ B_x \frac{(y-X)(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1\ .\ 2\ldots\ldots(x-2)} + \text{ecc.}$$

$$= A_x \frac{(y-X-1)(y-X-2)\ldots(y-X-x+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots(x-1)}$$

$$+ B_x \frac{(y-X-1)(y-X-2)\ldots(y-X-x+2)}{1\ .\ 2\ldots\ldots(x-2)} + \text{ecc.}$$

$$+ A_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots(y-X'-2x+5)}{1\ldots\ldots(x-2)}$$

$$+ B_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots(y-X'-2x+6)}{1\ldots\ldots(x-3)} + \text{ecc.}$$

ove X' è ciò che diventa X ponendovi $x-1$ in luogo di x. Ma abbiamo

$$\frac{(y-X)\ldots(y-X-x+2)}{1\ldots(x-1)} = \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+1)}{1\ldots\ldots(x-1)}$$

$$+ \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1\ldots(x-2)},\ \frac{(y-X)\ldots(y-X-x+3)}{1\ldots(x-2)}$$

$$= \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1\ldots(x-2)} + \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1\ldots(x-3)},$$

ecc.

Dunque sostituendo questi valori sarà

$$A_x \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1\ldots\ldots(x-2)} + B_x \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1\ldots\ldots(x-3)}$$

$$+ C_x \frac{(y-X-1)\ldots\ldots(y-X-x+4)}{1\ldots\ldots\ldots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$= A_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots\ldots(y-X'-2x+5)}{1\ldots\ldots\ldots(x-2)}$$

$$+ B_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots\ldots(y-X'-2x+6)}{1\ldots\ldots\ldots\ldots(x-3)} + \text{ecc.}$$

Siccome X è una funzione indeterminata, determiniamola in modo, che sia $y-X-1=y-X'-x+2$, cioè $X-X'=x-3$, e integrando sarà $X=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$. Adesso paragonando i termini omologi avremo $A_x=A_{x-1}$, $B_x=B_{x-1}$, $C_x=C_{x-1}$, ecc. dunque tutte le funzioni A_x, B_x, ecc. sono in questo caso quantità costanti. Per determinare il valore di queste costanti, le quali chiameremo respettivamente A, B, C, ecc. supponghiamo in primo luogo $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=A$, e nel caso di $y=1$ essendo $Z^{(1,1)}=1$, sarà $A=1$. Sia adesso $x=2$, e sarà $Z^{(0,2)}=y+B$; ma facendo $y=1$ abbiamo $Z^{(1,2)}=1=1+B$; dunque $B=0$. Sia $x=3$, sarà $Z^{(y,3)}=\frac{y(y-1)}{2}+C$, e quindi $Z^{(1,3)}=0=C$. Nella medesima maniera si troveranno le altre costanti D, E, ecc. uguali a zero. Dunque l' integrale della equazione proposta sarà così espresso:

$$Z^{(y,x)}=\frac{\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}\right)\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}-1\right)(\ldots\ldots)\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}-x+2\right)}{1\quad.\quad 2\ldots\ldots\ldots\ldots(x-1)}.$$

la qual formola, quantunque di una forma diversa, coincide però con le altre trovate di sopra (6, 7, 8).

17. Cerchiamo adesso l' integrazione dell' equazione trattata al n.° 9; cioè la seguente

$$z^{(y,x)} = xz^{(y-1,x)} + z^{(y-x+1,x-1)}$$

per la quale si ha $z^{(y,1)} = z^{(y-1,1)}$. Ponendo ne' due termini $z^{(y,x)} - xz^{(y-1,x)}$ la quantità f^{y-X} in luogo di $z^{(y,x)}$, e dividendo per f^{y-X} avremo $1 - \frac{x}{f}$, e $\nabla(1 - \frac{x}{f})$ $= (1 - \frac{1}{f})(1 - \frac{2}{f})(1 - \frac{3}{f}) \dots (1 - \frac{x}{f})$. Questa quantità posta $= 0$ ci darà per f i valori $1, 2, 3, \dots x$. Dunque l' integrale cercato sarà della forma

$$z^{(y,x)} = A_x + B_x 2^{y-X} + C_x 3^{y-X} + D_x 4^{y-X} + \text{ecc.}$$

Sostituendo questo valore nella equazione proposta, essa diventerà

$$A_x + B_x 2^{y-X} + C_x 3^{y-X} + D_x 4^{y-X} + \text{ecc.}$$

$$= xA_x + xB_x 2^{y-X-1} + xC_x 3^{y-X-1} + xD_x 4^{y-X-1} + \text{ecc.}$$

$$+ A_{x-1} + B_{x-1} 2^{y-x-X'+1} + C_{x-1} 3^{y-x-X'+1}$$

$$+ D_{x-1} 4^{y-x-X'+1} + \text{ecc.}$$

cioè

$$(1-x)A_x + (2-x)B_x 2^{y-X-1} + (3-x)C_x 3^{y-X-1} + \text{ecc.}$$

$$= A_{x-1} + B_{x-1} 2^{y-x-X'+1} + C_{x-1} 3^{y-x-X'+1} + \text{ecc.}$$

Per determinare X, facciamo $y - X - 1 = y - x - X' + 1$, cioè $X - X' = x - 2$, e integrando avremo $X = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$. Adesso paragonando i termini omologi avremo l' equazioni,

$(1-x)A_x = A_{x-1}$, $(2-x)B_x = B_{x-1}$, $(3-x)C_x = C_{x-1}$, ecc.

Sia A il valore di A_x, quando $x=1$, e dall' equazione

$A_x = \frac{-1.A_{x-1}}{x-1}$ avremo $A_2 = \frac{-1.A}{1}$, $A_3 = \frac{-1.A_2}{2}$

$= \frac{(-1)^2 A}{1.2}$; così $A_4 = \frac{(-1)^3 A}{1.2.3}$, e generalmente

$A_x = \frac{(-1)^{x-1}.A}{1.2.3...(x-1)}$. Sia B il valore di B_x quando $x=2$, e

l' equazione $B_x = \frac{-1.B_{x-1}}{x-2}$ ci darà $B_3 = \frac{-1.B}{1}$,

$B_4 = \frac{-1.B_3}{2} = \frac{(-1)^2.B}{1.2}$, $B_5 = \frac{(-1)^3 B}{1.2.3}$, ed in generale

$B_x = \frac{(-1)^{x-2}.B}{1.2.3...(x-2)}$. Similmente si troverà

$C_x = \frac{(-1)^{x-3}.C}{1.2.3...(x-3)}$, $D_x = \frac{(-1)^{x-4}.D}{1.2.3...(x-4)}$, ove $C = C_x$ posto $x=3$, e $D=D_x$ postovi $x=4$. Adesso per determinare le costanti A, B, C, ecc. facciamo nell' integrale $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)} = A$, e ponendo $y=1$, $A = Z^{(1,1)} = 1$; onde $A_x = \frac{(-1)^{x-1}}{1.2.3...(x-1)}$. Ponghiamo $x=2$, ed avremo $Z^{(y,2)} = -1 + B2^y$, e facendo $y=2$, $Z^{(2,2)} = 1 = -1 + 4B$, cioè $B = \frac{1}{2}$, e $B_x = \frac{(-1)^{x-2}}{2.1.2...(x-2)}$. Posto $x=3$, sarà $Z^{(y,3)} = \frac{1}{2} - \frac{1.2^{y-2}}{1} + C3^{y-1}$, e facendo $y=3$,

$Z^{(3,3)}=0=\frac{1}{2}-2+9C$, cioè $C=\frac{1}{2.3}$, e

$C_x=\frac{(-1)^{x-3}}{2.3.1.2...(x-3)}$. Così si troverà

$D_x=\frac{(-1)^{x-4}}{2.3.4.1.2...(x-4)}$, ecc. Dunque l' integrale cercato farà

$$Z^{(y,x)}=\frac{(-1)^{x-1}}{1.2.3...(x-1)}+\frac{(-1)^{x-2}}{2.1.2.3...(x-2)}2^{y-(x-1)(x-2):2}$$
$$+\frac{(-1)^{x-3}}{2.3.1.2...(x-3)}3^{y-(x-1)(x-2):2}$$
$$+\frac{(-1)^{x-4}}{2.3.4.1.2...(x-4)}4^{y-(x-1)(x-2):2}+\text{ecc.}$$

Sia per esempio $x=3$, $y=8$, ed avremo $Z^{(8,3)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}2^7+\frac{1}{6}3^7=\frac{1-128+729}{2}=\frac{602}{2}=301$, il qual valore combina con quello che abbiamo trovato di sopra per mezzo dell' altra formola.

Sia $y=7$, $x=4$, cioè si cerchi il settimo termine nella quarta fila della serie del n.° 9. Avremo

$$Z^{(7,4)}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}2^4-\frac{1}{6}3^4+\frac{1}{24}4^4=-\frac{1}{6}+4-\frac{27}{2}+\frac{64}{6}$$
$$=\frac{-1+24-81+64}{6}=1,$$ come appunto è nella serie.

L' introdurre nell' integrale una funzione X da determinarsi poi a piacere, come abbiamo fatto ne' due passati Problemi, può esser di molta utilità per determinare in varj casi più semplicemente le funzioni della variabile x, che entrano nell' integrale. La ragione poi della sostituzione $Z^{(y,x)}=af^{y-x}$ invece di $Z^{(y,x)}=f^y$, è la seguente. Essendo $Z^{(y,x)}=af^y$ un integrale particolare di una equazione a dif-

ferenze finite, nella quale x è coſtante, ſarà a una funzione di x; onde in luogo di a ſi potrà porre af^{-x}, ed allora ſi avrà $Z^{(y,x)} = af^{-x}f^{y} = af^{y-x}$.

ARTICOLO III.

Della partizione de' numeri.

18. I problemi della partizione de' numeri mi hanno condotto a quella ſpecie di equazioni, delle quali ho cercato l' integrale nell' articolo I. Queſti problemi ſono ſtati trattati per la prima volta dal celebre Sig. *Eulero* nella ſua *Introduzione all' analiſi degl' Infiniti*, e ne' *Comentarj dell' Accademia di Pietroburgo*. Egli ha dedotto un metodo ingegnoſiſſimo dalla evoluzione delle funzioni in ſerie, tanto più a ragione ſtimato dal ſuo Autore, perchè, com' ei dice nella *Prefazione* dell' Opera citata, ſembravangli queſti problemi ſenza il ſuo metodo affatto inacceſſibili alle forze dell' analiſi. Niuno, che io ſappia, ha in ſeguito fatte ulteriori ricerche in queſta materia. Eſaminando direttamente queſti problemi, ho tentato di ridurli alla integrazione di una equazione a differenze finite e parziali; il qual metodo ſembra la regia ſtrada per riſolvere tutt' i problemi, che in qualche modo dipendono dalla dottrina delle combinazioni. Quindi integrando queſt' equazioni, le quali da principio mi preſentarono non ordinarie difficoltà, ſon giunto in una maniera, che ſembrami non affatto inelegante, ad una formola generale, che mi dà la ſoluzione cercata in tutt' i caſi; la qual formola difficilmente rintracciar ſi potrebbe col metodo del Sig. *Eulero*. Queſto io eſporrò ne' ſeguenti problemi, i quali comprendono i diverſi caſi di partizione di numeri.

PROBLEMA

PROBLEMA IV.

19. *Trovare il numero delle maniere, nelle quali un numero qualunque* y *può esser la somma di* x *termini della serie naturale* 1, 2, 3, 4, ecc., *o uguali o disuguali tra loro.*

Disponendo per ordine tutte le maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti o uguali o disuguali, ne nasceranno le seguenti serie.

$$y = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + (y - x + 1)$$
$$\cdots\cdots\cdots + 1 + 2 + (y - x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 3 + (y - x - 1)$$
ecc. (*a*)
$$\cdots\cdots\cdots + 1 + 2 + 2 + (y - x - 1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 3 + (y - x - 2)$$
ecc.
$$\cdots\cdots\cdots + 1 + 3 + 3 + (y - x - 3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 4 + (y - x - 4)$$
ecc.
$$y = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + 2 + 2 + (y - 2x + 2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 2 + 3 + (y - 2x + 1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 2 + 4 + (y - 2x)$$
ecc. (*b*)
$$\cdots\cdots\cdots + 2 + 3 + 3 + (y - 2x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 4 + (y - 2x - 1)$$
ecc.
$$\cdots\cdots\cdots + 2 + 4 + 4 + (y - 2x - 2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 5 + (y - 2x - 3)$$
ecc.
$$y = 3 + 3 + 3 + \ldots + 3 + 3 + 3 + (y - 3x + 3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 4 + (y - 3x + 2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 5 + (y - 3x + 1)$$
ecc. (*c*)
$$\cdots\cdots\cdots + 3 + 4 + 4 + (y - 3x + 1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 5 + (y - 3x)$$
ecc.
$$\cdots\cdots\cdots + 3 + 5 + 5 + (y - 3x - 1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots + 6 + (y - 3x - 2)$$
ecc. ecc.

In tutte queſte ſerie, che ſono compoſte di x termini, tutt' i numeri ſi devono combinare in tutte le maniere ſoddisfacenti, purchè il primo termine reſti ſempre l' iſteſſo. Le lettere a, b, c, ecc. eſprimono il numero delle ſerie corriſpondenti, e quindi il numero delle maniere, nelle quali il numero y può dividerſi in x parti, è $= a + b + c +$ ecc. Ora è chiaro che a è il numero delle maniere, nelle quali il numero $y - 1$ può dividerſi in $x - 1$ parti; le altre ſerie (b), (c), ecc. ſono tali, che il valore di b, c, ecc. ſarà l' iſteſſo, ſe ad eſſe ſoſtituiamo le ſeguenti ſerie compoſte di x termini.

$1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 + 1 + (y - 2x + 1)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + (y - 2x)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 2x - 1)$

ecc. (b)

$\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + 2 + (y - 2x - 1)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 2x - 2)$

ecc.

$\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 3 + 3 + (y - 2x - 3)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 2x - 4)$

ecc.

$2 + 2 + 2 + \ldots\ldots + 2 + 2 + (y - 3x + 2)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 3x + 1)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 3x)$

ecc. (c)

$\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 3 + 3 + (y - 3x)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 3x - 1)$

ecc.

$\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 4 + 4 + (y - 3x - 2)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 3x - 3)$

ecc. ecc.

Ora è evidente, che queſte ſeconde ſerie rappreſentano le maniere, nelle quali il numero $y - x$ può dividerſi in x parti; infatti ponendo nelle prime $y - x$ in luogo di y ne naſcono le ſeconde; dunque il numero delle maniere, nelle quali può in x parti dividerſi il numero $y - x$, è $= b + c + d +$ ecc. Poſto queſto, ſe $Z^{(y, x)}$ rappreſenta il numero delle maniere, nelle quali può il numero y dividerſi in x parti, avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}$$

l' integrazione della quale ci darà la soluzione del problema.

Ponghiamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla \alpha_x$, e sostituendo avremo

$$\alpha_x = b^{-x} \alpha_x + b^{-1}, \text{ cioè } \alpha_x = \frac{b^{-1}}{1 - b^{-x}}, \text{ e}$$

$$\nabla \alpha_x = \frac{b^{-x}}{(1 - b^{-1})(1 - b^{-2}) \ldots (1 - b^{-x})}.$$ Quindi avremo in generale (2) $r^{(m)} =$ alle potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici dell' equazioni $b - 1 = 0$, $b^2 - 1 = 0$, $b^3 - 1 = 0$, ... $b^x - 1 = 0$. Ora le potenze delle radici di quest' equazioni sono espresse dalla Tavola seguente.

Potenze	1ᵉ	2ᵉ	3ᵉ	4ᵉ	5ᵉ	6ᵉ	ecc.
equazione 1ª	1	1	1	1	1	1	
2ª	0	2	0	2	0	2	
3ª	0	0	3	0	0	3	
4ª	0	0	0	4	0	0	
ecc.							

E' facile il vedere, che la somma delle potenze $m.^{esime}$ delle radici di tutte quest' equazioni potrà esprimersi dalla formola $m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \ldots\ldots + \frac{m}{m}$, purchè da questa si rigettino tutt' i termini fratti, e quei che sono maggiori di x. Questa formola così intesa esprimiamola col segno $\delta . m$, ed avremo, qualunque sia la quantità m, $r^{(m)} = \delta(m+1)$. Quindi sarà (2)

$$A' = \delta 1$$

$$A'' = \frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}$$

$$A''' = \frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}$$

e in generale

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(m-3)}{m}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4}+\delta 1\frac{\delta 3}{4}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(m-4)}{m}+\text{ecc.}$$

Trovati questi valori sarà

$$\nabla\alpha_{x} = b^{-x}+A'b^{-x-1}+A''b^{-x-2}+A'''b^{-x-3}+\text{ecc.}$$

e quindi (4)

$Z^{(y,x)}=\phi(y-x)+A'\phi(y-x-1)+A''\phi(y-x-2)+\text{ecc.}$
Facendo $x=1$, abbiamo $A'=A''=A'''=\text{ecc.}=1$: dunque
$Z^{(y,1)}=\phi(y-1)+\phi(y-2)+\phi(y-3)+\phi(y-4)+\text{ecc.}$
e ponendo $y-1$ in luogo di y

$$Z^{(y-1,1)}=\phi(y-2)+\phi(y-3)+\phi(y-4)+\text{ecc.}$$

Quindi sarà $Z^{(y,1)}-Z^{(y-1,1)}=\phi(y-1)$. Ora dalla natura del problema si deduce $Z^{(y,1)}=1$ se y è positiva, e $Z^{(y,1)}=0$ se y è zero o negativa; dunque $Z^{(1,1)}-Z^{(0,1)}=1$ $=\phi.0$, cioè $\phi.y$ è $=1$ nel solo caso di $y=0$, negli altri casi è sempre $=0$. Avremo perciò $Z^{(y,x)}=$ al coefficiente di $\phi.0$, il quale se si suppone essere $A^{(m)}$ sarà $y-x-m=0$, cioè $m=y-x$, e quindi

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta(y-x)}{y-x}+\delta 1\frac{\delta(y-x-1)}{y-x}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-x-2)}{y-x}$$

$$+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(y-x-3)}{y-x}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4}+\delta 1\frac{\delta 3}{4}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(y-x-4)}{y-x}+\text{ecc.}$$

Si debba per esempio trovare in quante maniere il numero 18 può dividersi in sedici parti; avremo $x=16$, $y=18$, $\delta(y-x)=\delta 2=2+1=3$, $\delta 1=1$: quindi $Z^{(18,16)}=\frac{3}{2}$

$+\frac{1}{2}=2$. Queste due maniere sono le seguenti

$18=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+3$
$18=1+\ldots\ldots\ldots+1+2+2$

Cerchiamo adesso in quante maniere si può dividere il numero 9 in quattro parti; sarà $x=4$, $y=9$, $\delta(y-x)=\delta 5=1$, $\delta 4=4+2+1=7$, $\delta 3=3+1=4$, $\delta 2=2+1=3$, $\delta 1=1$. Onde il numero delle maniere cercato

$$Z^{(9,4)}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5}$$

$$+\left\{\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{5}=\frac{8}{5}+\frac{8}{5}+\frac{9}{5}+\frac{5}{5}=\frac{30}{5}=6.$$ Queste maniere sono le seguenti;

$9=1+1+1+6$
$9=1+1+2+5$
$9=1+1+3+4$
$9=1+2+2+4$
$9=1+2+3+3$
$9=2+2+2+3$

PROBLEMA V.

20. *Trovare in quante maniere il numero* y *può esser la somma di* x *diversi termini della serie naturale.*

Nel Problema precedente abbiamo considerato la partizione de' numeri in parti o uguali o disuguali; in questo passiamo a trattare della partizione de' numeri in parti tra loro disuguali. Sia dunque $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti tutte disuguali tra loro, e con un discorso simile a quello usato nel Problema precedente giungeremo alla equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y-x,x-1)}$$

Per integrare questa equazione facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_x$, e so-

ſtituendo avremo $\alpha_x = b^{-x}\alpha_x + b^{-x}$, cioè $\alpha_x = \frac{b^{-x}}{1 - b^{-x}}$, e

$\nabla \alpha_x = \frac{b^{-x(x+1):2}}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\dots(1-b^{-x})}$. Dunque ſarà come nel Problema precedente $r^{(m)} = \delta(m+1)$, e

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1\,\frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1\,\frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(m-3)}{m}$$

$$+ \left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1\,\frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1\,\frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(m-4)}{m} + \text{ecc.}$$

ove $\delta m = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \dots + \frac{m}{m}$, laſciati da parte i termini fratti e quei che ſono maggiori di x.

Trovati per la formola precedente i valori di A', A'', ecc. avremo

$$\nabla \alpha_x = b^{-x(x+1):2} + A' b^{-x(x+1):2-1} + A'' b^{-x(x+1):2-2} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) + A'\phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)$$

$$+ A''\phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Ponendo $x = 1$ abbiamo

$Z^{(y,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$

$Z^{(y-1,1)} = \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$

Dunque $Z^{(y,1)} - Z^{(y-1,1)} = \phi(y-1)$. Ma per la natura del problema $Z^{(y,1)} = 1$ nel caſo di y poſitiva, ed è $= 0$ nel caſo di y zero o negativa; dunque $\phi . y$ ſarà $= 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$, negli altri caſi ſarà ſempre $\phi . y = 0$. Sarà dunque $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi . 0$, il quale ſe ſi pone

essere $A^{(m)}$, avremo $y - \frac{x(x+1)}{2} - m = 0$, cioè

$m = y - \frac{x(x+1)}{2}$, e quindi

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} + \delta 1 \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+ \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 2\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+ \left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1 \frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4} + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\} \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 3\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per esempio in quante maniere il numero 18 può dividersi in 5 parti disuguali; avremo $x = 5$, $y = 18$, $\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) = \delta 3 = 4$, $\delta 2 = 3$, $\delta 1 = 1$; e quindi il numero delle maniere cercato

$$Z^{(18,5)} = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3} = 3.$$

Sia adesso $x = 4$, $y = 15$, cioè cerchiamo in quante maniere può il 15 dividersi in 4 parti disuguali. Sarà

$\delta(y - \frac{x(x+1)}{2}) = \delta 5 = 1$, $\delta 4 = 4 + 2 + 1 = 7$, $\delta 3 = 3 + 1 = 4$, $\delta 2 = 2 + 1 = 3$, $\delta 1 = 1$, e quindi

$$Z^{(15,4)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})\frac{4}{5} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5}$$

$$+ \left\{\frac{7}{4} + \frac{4}{4} + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})\frac{3}{4} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{5}$$

$$= \frac{8 + 8 + 9 + 5}{5} = 6.$$

21. Se nella formola del Problema precedente si pone $y - \frac{x(x-1)}{2}$ in luogo di y, ne nascerà l' espressione di questo. Dunque il numero y può dividersi in tante maniere in parti tutte disuguali, in quante maniere nel medesimo numero di parti o uguali o disuguali può dividersi il numero $y - \frac{x(x-1)}{2}$.

PROBLEMA VI.

22. *Trovare il numero delle maniere, nelle quali il numero* y *può esser la somma di* x *termini della serie de' numeri dispari* 1, 3, 5, 7, ecc. *uguali tra loro o disuguali*.

Facendo $Z^{(y,x)} =$ al cercato numero delle maniere, avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-2x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}.$$

Posto $Z^{(y,x)} = b^y \nabla \underset{x}{\alpha}$ avremo sostituendo $\underset{x}{\alpha} = \underset{x}{\alpha}\, b^{-2x} + b^{-1}$,

cioè $\underset{x}{\alpha} = \frac{b^{-1}}{1 - b^{-2x}}$, e $\nabla \underset{x}{\alpha} = \frac{b^{-x}}{(1-b^{-2})(1-b^{-4})\ldots(1-b^{-2x})}$.

Facciamo $\frac{1}{(1-b^{-2})(1-b^{-4})\ldots(1-b^{-2x})} = 1 + A'b^{-2} + A''b^{-4} + A'''b^{-6} +$ ecc. e sarà (2) $r = \delta 1$, $r' = \delta 2$, e generalmente $r^{(m)} = \delta(m+1)$. Onde qualunque sia il numero m, avremo sempre

$A^{(m)}$

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1\, \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\, \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1\, \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\, \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Sarà dunque

$$\underset{x}{\nabla}\alpha = b^{-x} + A' b^{-x-2} + A'' b^{-x-4} + A''' b^{-x-6} + \text{ecc.}$$

e perciò (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi(y-x) + A'\phi(y-x-2) + A''\phi(y-x-4)$$
$$+ A'''\phi(y-x-6) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$ sarà $A^{(\mu)} = 1$, qualunque sia il numero μ; quindi

$$Z^{(y,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-3) + \phi(y-5) + \phi(y-7) + \text{ecc.}$$
$$Z^{(y-2,1)} = \phi(y-3) + \phi(y-5) + \phi(y-7) + \text{ecc.}$$

Avremo perciò $Z^{(y,1)} - Z^{(y-2,1)} = \phi(y-1)$; ma $Z^{(y,1)} = 1$ nel caso di y dispari e positiva, ed è $= 0$ nel caso di y pari o negativa; dunque sarà $\phi.0 = Z^{(1,1)} - Z^{(-1,1)} = 1$; negli altri casi sarà $\phi.y = 0$. Quindi $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi.0$; sia questo coefficiente $A^{(m)}$, avremo $y - x - 2m = 0$, cioè $m = \frac{y-x}{2}$. Siccome il valore di m deve essere intero, converrà che il numero $y - x$ sia divisibile per due, cioè che i numeri y ed x siano o ambedue pari o ambedue dispari; ciò che deve necessariamente succedere, acciò il problema sia possibile. Posto questo sarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}} + \delta 1\, \frac{\delta\frac{y-x-2}{2}}{\frac{y-x}{2}} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\, \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta\frac{y-x-4}{2}}{\frac{y-x}{2}}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1\, \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\, \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta\frac{y-x-6}{2}}{\frac{y-x}{2}}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4}+\delta 1\,\frac{\delta 3}{4}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\,\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta\frac{y-x-8}{2}}{\frac{y-x}{2}}+\text{ecc.}$$

Sia per esempio $y=14$, $x=6$, avremo $\delta\frac{y-x}{2}=\delta 4=7$, $\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e $Z^{(14,6)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}$ $+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}=\frac{7+4+6+3}{4}=5=$ al numero delle maniere, nelle quali il 14 può esser la somma di sei numeri dispari.

23. Se si aggiungerà nel Problema la condizione, che i termini della serie de' numeri dispari, la somma de' quali forma il numero y, siano tutti disuguali, avremo allora l'equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-2x,x)}+Z^{(y-2x+1,x-1)}$$

e operando come sopra troveremo l'integrale di questa equazione così espresso:

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta\frac{y-x^2}{2}}{\frac{y-x^2}{2}}+\delta 1\,\frac{\delta\frac{y-x^2-2}{2}}{\frac{y-x^2}{2}}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-x^2-4}{2}}{\frac{y-x^2}{2}}+\text{ecc.}$$

Supponendo per esempio $y=24$, $x=4$, avremo $\delta\frac{y-x^2}{2}=\delta 4=7$, $\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e

$$Z^{(24,4)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}=5;$$

cioè cinque ſono le maniere, nelle quali il numero 24 può eſſer la ſomma di quattro numeri diſpari diſuguali.

24. Se nella eſpreſſione del numero 22 ſi pone $y-x(x-1)$ in luogo di y, ne verrà la formola del numero precedente. Di qui naſce il ſeguente Teorema: il numero y in tante maniere può eſſer la ſomma di x termini tutti diſuguali della ſerie de' numeri diſpari, in quante il numero $y-x(x-1)$ può eſſer la ſomma di x termini della medeſima ſerie o uguali o diſuguali.

PROBLEMA VII.

25. *Trovare in quante maniere il numero* y *può naſcere dalla ſomma de' numeri* 1, 2, 3, 4, ... x.

Finora abbiamo ſuppoſto, che foſſe aſſegnato il numero delle parti, nelle quali deve dividerſi il numero y; adeſſo paſſiamo ad un' altra ſorte di problemi, ne' quali il numero delle parti può eſſer qualunque, ma ſono ſoltanto determinate le parti; in modo che nella compoſizione del numero y non devono aver luogo che i numeri non maggiori di x, ma queſti poſſono prenderſi in qualunque numero. Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e ponendo

$$y=p+2q+3r+4s+\ldots+xt$$

è chiaro che tante ſaranno le maniere cercate, in quante poſſono da queſta equazione determinarſi in numeri interi le lettere p, q, r, s, ... t. Ora tutte queſte maniere ſi troveranno facendo ſucceſſivamente $t=0$, 1, 2, 3, ecc. ma le maniere, che corriſpondono a queſti valori di t, è chiaro che ſaranno eſpreſſe reſpettivamente da $Z^{(y,x-1)}$, $Z^{(y-x,x-1)}$, $Z^{(y-2x,x-1)}$, ecc. Dunque avremo

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y,x-1)}+Z^{(y-x,x-1)}+Z^{(y-2x,x-1)}+\text{ecc.}$$

e ponendo $y-x$ in luogo di y

$$Z^{(y-x,x)}=Z^{(y-x,x-1)}+Z^{(y-2x,x-1)}+\text{ecc.}$$

donde naſce l' equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y,x-1)}.$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_x$, e ſarà $\alpha_x=\frac{1}{1-b^{-x}}$, e quindi

$\nabla \alpha_x = \frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\ldots(1-b^{-x})}$, cioè (2) ponendo

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(m-2)}{m} + \text{ecc.}$$

come sopra (22), sarà (4)

$Z^{(y, x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$

Posto $x = 1$, avremo $A^{(\mu)} = 1$ qualunque sia μ; dunque

$$Z^{(y, 1)} = \phi y + \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(y-1, 1)} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \text{ecc.}$$

e quindi $\phi y = Z^{(y, 1)} - Z^{(y-1, 1)}$. Ora si osservi che $Z^{(y, 1)}$ è $= 0$, quando y è negativa, perchè i numeri negativi non possono mai nascere dalla somma di unità; ed è $= 1$ quando y è zero, perchè il zero nasce dalla somma di 0 unità. Dunque $Z^{(0, 1)} - Z^{(-1, 1)} = \phi 0 = 1$. Sia $A^{(m)}$ il coefficiente di $\phi 0$, ed avremo $y - m = 0$, cioè $m = y$, e quindi

$$Z^{(y, x)} = \frac{\delta y}{y} + \delta 1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-2)}{y}$$
$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(y-3)}{y}$$
$$+ \left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1 \frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(y-4)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $y = 5$, $x = 4$, avremo $\delta 5 = 1$, $\delta 4 = 7$, $\delta 3 = 4$, $\delta 2 = 3$, $\delta 1 = 1$, e quindi $Z^{(5, 4)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} + \frac{5}{5} = 6$. Dunque in sei maniere il numero 5 può nascere dalla somma de' numeri 1, 2, 3, 4.

26. Se in questa formola ponghiamo $y - x$ in luogo di y, ne verrà quella del Problema quarto. Dunque il numero y in tante maniere può esser la somma di x numeri, in quante il numero $y - x$ può nascere dalla somma de' numeri 1,

2, 3, ... x. Paragonando con questa le formole degli altri Problemi, ne nasceranno altri Teoremi.

PROBLEMA VIII.

27. *Data una serie qualunque aritmetica* (A) m, m + n, m + 2n, ecc. *trovare in quante maniere da* x *termini di questa serie si può formare il numero y.*

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e facendo primieramente $x = 2$, sia $y = m + (m + nz) = 2m + nz$, alla qual forma può sempre ridursi il numero y, se pure può esser la somma di due termini della serie (A). Ma per la natura delle progressioni aritmetiche tra i termini m ed $m + nz$ ve ne sono altri di numero $z - 1$, il primo de' quali e l'ultimo, il secondo e il penultimo, e gli altri nel medesimo ordine danno insieme l' istesso numero y; ove si osservi che se $z - 1$ è dispari, il doppio del termine medio è uguale al medesimo numero y. Dunque avremo $Z^{(y,2)} = \frac{z+2}{2}$, o $= \frac{z+1}{2}$, secondochè z è pari o dispari; quindi nell' uno e nell' altro caso avremo $Z^{(y-2n,2)} = Z^{(y,2)} - 1$, $Z^{(y-3n,2)} = Z^{(y-n,2)} - 1$, e generalmente $Z^{(y-\mu n,2)} = Z^{(y-(\mu-2)n,2)} - 1$.

Sia adesso $x = 3$, ed $y = m + m + (m + nz) = 3m + nz$; le lettere poi c, d, e siano i termini della serie (A), dalla somma de' quali nasce y, cioè sia $y = c + d + e$. Se facciamo $c = m$, avremo $d + e = 2m + nz$, lo che può succedere in $Z^{(y-m,2)}$ maniere; se $c = m + n$, sarà $d + e = 2m + n(z-1)$, il che succede in $Z^{(y-m-n,2)}$ maniere. Similmente se $c = m + 2n$, $m + 3n$, $m + 4n$, ecc. saranno i numeri delle maniere rispettivi $Z^{(y-m-2n,2)}$, $Z^{(y-m-3n,2)}$, $Z^{(y-m-4n,2)}$, ecc. Ma si osservi, che delle maniere rappresentate da $Z^{(y-m-n,2)}$ una dà $d = a$, la qual maniera è contenuta in quelle espresse da $Z^{(y-m,2)}$. Così $Z^{(y-m-2n,2)}$, $Z^{(y-m-3n,2)}$, $Z^{(y-m-4n,2)}$, ecc. contengono due, tre, quattro, ecc. maniere, che sono già state contate.

Ora per trovare il valore di $Z^{(y,3)}$ convien sommare tutte queste particolari maniere, e sarà perciò

$$Z^{(y,3)} = Z^{(y-m,2)} + Z^{(y-m-n,2)} - 1 + Z^{(y-m-2n,2)} - 2$$
$$+ Z^{(y-m-3n,2)} - 3 + \text{ecc.}$$
$$= Z^{(y-m,2)} + Z^{(y-m-3n,2)} + Z^{(y-m-6n,2)} + Z^{(y-m-9n,2)} + \text{ecc.}$$

Ponendo $y - 3n$ in luogo di y, sarà similmente

$$Z^{(y-3n,3)} = Z^{(y-m-3n,2)} + Z^{(y-m-6n,2)} + Z^{(y-m-9n,2)} + \text{ecc.}$$

cioè $Z^{(y,3)} = Z^{(y-3n,3)} + Z^{(y-m,2)}$.

Con un discorso simile troveremo

$$Z^{(y,4)} = Z^{(y-4n,4)} + Z^{(y-m,3)}$$
$$Z^{(y,5)} = Z^{(y-5n,5)} + Z^{(y-m,4)}$$

e generalmente

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-nx,x)} + Z^{(y-m;x-1)}$$

Per integrare questa equazione facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, e sostituendo avremo $\alpha_x = \dfrac{b^{-m}}{1 - b^{-nx}}$, e quindi

$$\nabla\alpha_x = \frac{b^{-mx}}{(1-b^{-n})(1-b^{-2n})\ldots\ldots(1-b^{-nx})}.$$ Adesso ponendo

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

come sopra, avremo

$$\nabla\alpha_x = b^{-mx} + A'b^{-mx-n} + A''b^{-mx-2n} + A'''b^{-mx-3n} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi(y-mx) + A'\phi(y-mx-n) + A''\phi(y-mx-2n) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$, sarà

$$Z^{(y,1)} = \phi(y-m) + \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc.}$$

e quindi $Z^{(y,1)} - Z^{(y-n,1)} = \phi(y-m)$. Di qui è facile il vedere, che $\phi.y = 1$ nel solo caso di $y = 0$: dunque se $A^{(\mu)}$ è nel valore di $Z^{(y,x)}$ il coefficiente di $\phi.0$, cioè se $y - mx - n\mu = 0$, e perciò $\mu = \dfrac{y-mx}{n}$, sarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\dfrac{y-mx}{n}}{\dfrac{y-mx}{n}} + \delta 1 \frac{\delta\dfrac{y-mx-n}{n}}{\dfrac{y-mx}{n}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-mx-2n}{n}}{\frac{y-mx}{n}}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta\frac{y-mx-3n}{n}}{\frac{y-mx}{n}}+\text{ecc.},$$

28. Se in questa formola ponghiamo $m=n=1$, ne nascerà quella del n°. 19. Se facciamo $m=1$, $n=2$, avremo il caso de' numeri dispari sopra (22) considerato. Se si pone $n=m$, ed $y=my$, ne verrà di nuovo la formola del n°. 19. Dunque il numero my in tante maniere si può dividere in x parti della forma mz, in quante maniere il numero y può dividersi in x parti di qualunque forma. Sia adesso $m=1$, $n=3$, ed avremo la serie (B) 1, 4, 7, 10, 13, ecc.; e sarà in questo caso

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta\frac{y-x}{3}}{\frac{y-x}{3}}+\delta 1\frac{\delta\frac{y-x-3}{3}}{\frac{y-x}{3}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-x-6}{3}}{\frac{y-x}{3}}+\text{ecc.}$$

Quindi, acciò un numero y possa esser la somma di x termini della serie (B), conviene che $y-x$ sia divisibile per 3. Sia per esempio $y=16$, $x=4$, avremo $\delta\frac{y-x}{3}=\delta 4$ $=7$, $\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e $Z^{(16,4)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\frac{6}{4}$ $+\frac{3}{4}=5=$ al numero delle maniere, nelle quali il numero

16 può esser la somma di quattro termini della serie (B). Queste maniere sono le seguenti; $16 = 1 + 1 + 1 + 13$, $16 = 1 + 1 + 4 + 10$, $16 = 1 + 1 + 7 + 7$, $16 = 1 + 4 + 4 + 7$, $16 = 4 + 4 + 4 + 4$.

PROBLEMA IX.

29. Trovare in quante maniere da x diversi termini della serie (A) possa formarsi il numero y.

Con un discorso simile a quello del Problema precedente giungeremo alla equazione

$$Z^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-nx\,,\,x)} + Z^{(y-n(x-1)-m\,,\,x-1)}$$

Ponendo al solito $Z^{(y\,,\,x)} = b^y \nabla\alpha_x$ avremo $\alpha_x = \dfrac{b^{-n(x-1)-m}}{1-b^{-nx}}$, e

$$\nabla\alpha_x = \frac{b^{-mx-n\cdot x(x-1):2}}{(1-b^{-n})(1-b^{-2n})\ldots\ldots(1-b^{-nx})}$$; cioè sarà (2)

$$\nabla\alpha_x = b^{-mx-n\cdot x(x-1):2} + A'b^{-mx-n\cdot x(x-1):2-n}$$

$$+ A''b^{-mx-n\cdot x(x-1):2-2n} + \text{ecc.}$$

facendo come sopra

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1\,\frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

Quindi avremo (4)

$$Z^{(y\,,\,x)} = \phi\left(y - mx - n\,\frac{x(x-1)}{2}\right) + A'\phi\left(y - mx - n\,\frac{x(x-1)}{2} - n\right)$$

$$+ A''\phi\left(y - mx - n\,\frac{x(x-1)}{2} - 2n\right) + \text{ecc.}$$

Ponendo $x = 1$, abbiamo $A' = A'' = \text{ecc.} = 1$; onde

$Z^{(y\,,\,1)} = \phi(y-m) + \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc.}$

$Z^{(y-n\,,\,1)} = \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc}$

cioè $\phi(y-m) = Z^{(y\,,\,1)} - Z^{(y-n\,,\,1)}$. Di qui apparisce, che sarà $\phi(y-m) = 1$ nel solo caso di $y = m$; dunque $Z^{(y\,,\,x)} =$ al coefficiente di $\phi\,.\,0$; il quale se si pone essere $A^{(\mu)}$ avremo

$$y - mx - n\,\frac{x(x-1)}{2} - n\mu = 0$$, cioè

$\mu =$

$$\mu = \frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}}{n}, \text{ e}$$

$$Z^{(y,n)} = \frac{\delta\,\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}}{n}}{\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}}{n}} + \delta 1\,\frac{\delta\,\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}-n}{n}}{\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}}{n}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\,\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}-2n}{n}}{\frac{y-mx-n\frac{x(x-1)}{2}}{n}} + \text{ecc.}$$

30. I Problemi de' numeri 20 e 23 ſono caſi particolari del precedente. Se vogliamo ſapere ciò che ſucceda per riguardo alla ſerie (B), facciamo $m=1$, $n=3$, ed avremo

$$Z^{(y,n)} = \frac{\delta\,\frac{y-x\frac{3x-1}{2}}{3}}{\left(y-x\frac{3x-1}{2}\right):3} + \delta 1\,\frac{\delta\,\frac{y-x\frac{3x-1}{2}-3}{3}}{\left(y-x\frac{3x-1}{2}\right):3}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\,\frac{y-x\frac{3x-1}{2}-3}{3}}{\left(y-x\frac{3x-1}{2}\right):3} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per eſempio in quante maniere il numero 31 può eſſer la ſomma di 4 termini diverſi della ſerie (B); a-

vremo $x=4$, $y=31$, $\dfrac{\delta\, y-x\frac{3x-1}{2}}{3}=\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e $Z^{(31,4)}=\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=3$, le quali maniere sono: $31=1+4+7+19$, $31=1+4+10+16$, $31=1+7+10+13$.

31 Se nella formola del numero 27 ponghiamo $y-n\frac{x(x-1)}{2}$ in luogo di y, ne nascerà quella del numero 29. Di qui nasce il Teorema: in quante maniere il numero y può dividersi in x termini tutti disuguali della serie (A), in altrettante il numero $y-n\frac{x(x-1)}{2}$ può dividersi in x termini della medesima serie o uguali o disuguali.

PROBLEMA X.

32. *Data una serie di numeri qualunque, della quale il termine generale sia* Z_x, *trovare in quante maniere il numero* y *può esser la somma de' termini di questa serie* z_1, z_2, z_3 .... z_x.

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e facciamo

$$y=pz_1+qz_2+rz_3+sz_4+\ldots\ldots+tz_x$$

E' evidente che il numero cercato sarà uguale al numero delle diverse maniere, nelle quali possono determinarsi le lettere p, q, r, ecc. in modo che soddisfacciano alla equazione precedente. Ora tutte queste maniere saranno in numero uguali alla somma di tutte quelle, che si hanno ponendo successivamente $t=0$, 1, 2, ecc. Ma il numero delle maniere corrispondenti a $t=0$ è espresso da $Z^{(y,x-1)}$; e similmente il numero delle altre che convengono ai valori di $t=1$, 2, 3, ecc. è rappresentato respettivamente da $Z^{(y-z_x,x-1)}$,

$Z^{(y-2z_x, x-1)}$, $Z^{(y-3z_x, x-1)}$ ecc. Dunque sarà

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y,x-1)} + Z^{(y-z_x, x-1)} + Z^{(y-2z_x, x-1)} + Z^{(y-3z_x, x-1)} + \text{ecc.}$$

ma ponendo $y - z_x$ in luogo di y si ha

$$Z^{(y-z_x, x)} = Z^{(y-z_x, x-1)} + Z^{(y-2z_x, x-1)} + Z^{(y-3z_x, x-1)} + \text{ecc.}$$

Dunque si avrà l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-z_x, x)} + Z^{(y, x-1)}.$$

Facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x = \frac{1}{1 - b^{-z_x}}$, e

quindi $\nabla\alpha_x = \frac{1}{(1-b^{-z_1})(1-b^{-z_2})\ldots(1-b^{-z_x})}$. Ponendo adesso $\nabla\alpha_x = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$

è facile il vedere che sarà sempre

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

ove $\delta m = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \ldots + \frac{m}{m}$; ma di questo valore non devono prendersi che i termini interi non maggiori di z_x, e della forma z_x. Dunque sarà sempre $A' = A'' = A''' = \text{ecc.} = 0$, fino ad $A^{(z_1)} = z_1$. Posto questo avremo (4)

$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) +$ ecc.
Ma ponendo $x = 1$ abbiamo, com' è facile il vedere

$$Z^{(y,1)} = \phi.y + \phi(y - x_1) + \phi(y - 2x_1) + \phi(y - 3x_1) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(y-x_1,1)} = \phi(y - x_1) + \phi(y - 2x_1) + \phi(y - 3x_1) + \text{ecc.}$$

Dunque $\phi y = Z^{(y,1)} - Z^{(y-x_1,1)}$, e $\phi.y = 1$ nel solo caso di $y = 0$. Sarà perciò $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi.c$, cioè sarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta y}{y} + \delta 1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-2)}{y}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(y-3)}{y} + \text{ecc.}$$

33. Per darne un esempio, si abbia l'equazione a due indeterminate r, t di primo grado, $a = br + ct$, ove a, b, c sono quantità cognite e positive, e $c > b$. E' noto che questa equazione ammette in numeri interi un numero finito di soluzioni. Per trovar questo numero si faccia $z_1 = b$, $z_2 = c$, e il valore di $Z^{(a,2)}$ preso dal n.° precedente darà il numero cercato. Si abbia per esempio l' equazione $6 = 2r + 3t$, sarà $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $\delta 1 = 0$, $\delta 2 = 2$, $\delta 3 = 3$, $\delta 4 = 2$, $\delta 5 = 0$, $\delta 6 = 5$, e il numero delle soluzioni, che ammette in numeri interi questa equazione, sarà $Z^{(6,2)} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = 2$. Queste due soluzioni sono le seguenti; $r = 0$, $t = 2$; $r = 3$, $t = 0$, e oltre queste due non ve ne sono altre. L' istesso si dica dell' equazioni a più indeterminate.

34. Supponghiamo $z_x = nx$, cioè la serie proposta sia n, $2n$, $3n$, ... xn. E' chiaro che in questo caso il valore di $\nabla \alpha_1$ sarà della forma

$$\nabla\alpha_{x} = 1 + A'b^{-n} + A''b^{-2n} + A'''b^{-3n} + \text{ecc.}$$

ove al ſolito

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

ma nel valore di $\delta\mu$ devono prenderſi tutt' i numeri interi. Avremo dunque

$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-n) + A''\phi(y-2n) + A'''\phi(y-3n) + \text{ecc.}$
e $\phi.y$ eſſendo $=1$ nel ſolo caſo di $y=0$ (32), ſarà
$Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi 0$, il quale ſe ſi ſuppone eſſere

$A^{(\mu)}$, avremo $y - \mu n = 0$, cioè $\mu = \frac{y}{n}$; e quindi

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y}{n}}{y:n} + \delta 1 \frac{\delta\frac{y-n}{n}}{y:n} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-2n}{n}}{y:n}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta\frac{y-3n}{n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

35. Se nella formola del numero 27. ponghiamo $y+mx$ in luogo di y, ne naſcerà queſta. Dunque il numero y in tante maniere può naſcere dalla ſomma di x termini della ſerie m, $m+n$, $m+2n$, ecc; in quante il numero $y-mx$ può naſcere dalla ſomma de' numeri n, $2n$, $3n$, ... xn.

36. Sia $z_{x} = (2x-1)n$, cioè la ſerie propoſta ſia la ſeguente, n, $3n$, $5n$, ... $(2x-1)n$. Avremo

$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-n) + A''\phi(y-2n) + A'''\phi(y-3n) + \text{ecc.}$
e qui pure ſarà

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

ove $\delta\mu = \mu + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} + \ldots\ldots + \frac{\mu}{\mu}$, ma di queſta ſerie non devono prenderſi che i termini interi, diſpari, e non maggiori di $2x-1$. E ſiccome $\phi y = 1$ nel ſolo caſo di $y=0$, ſarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta \frac{y}{n}}{y:n} + \delta 1 \frac{\delta \frac{y-n}{n}}{y:n} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta \frac{y-2n}{n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

Facendo $n = 1$, sarà il numero delle maniere, nelle quali y può esser la somma de' numeri dispari $1, 3, 5, \ldots 2x-1$ espresso da

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta y}{y} + \delta 1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $y = 5$, $x = 3$, cioè si cerchi in quante maniere il numero 5 può nascere dalla somma de' numeri 1, 3, 5. Avremo $\delta y = \delta 5 = 5 + 1 = 6$, $\delta 4 = 1$, $\delta 3 = 3 + 1 = 4$, $\delta 2 = 1$, $\delta 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $= Z^{(5,3)} = \frac{6}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 3$, le quali sono, $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 3$, $5 = 5$.

37. Così se sarà più generalmente $z_x = ((a-1)x - (a-2)n)$, avremo

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta \frac{y}{n}}{y:n} + \delta 1 \frac{\delta \frac{y-n}{n}}{y:n} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta \frac{y-2n}{n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

e nel valore di $\delta \mu = \mu + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} + \ldots + \frac{\mu}{\mu}$ non dovranno prendersi che i numeri interi della forma $(a-1)p - (a-2)$ non maggiori di $(a-1)x - (a-2)$.

38. Sia $z_x = c^{x-1}$; cioè si abbia la progressione geometrica $1, c, c^2, \ldots c^{x-1}$; il valore di $Z^{(y,x)}$ sarà quel medesimo del n°. 32, e δy sarà $= y + \frac{y}{2} + \frac{y}{3} + \ldots + \frac{y}{y}$ prendendo solamente da questo valore i termini interi non maggiori di c^{x-1} e di questa forma. Si cerchi per esempio in quante maniere il numero 5 può nascere dalla somma de' termini 1, 2, 4. Sarà $c = 2$, $y = 5$, $x = 3$, $c^{x-1} = 4$, e $\delta y = \delta 5 = 1$, $\delta 4 = 4 + 2 + 1 = \delta 7$, $3 = 1$, $\delta 2 = 2 + 1 = 3$,

$\delta 1 = 1$, e quindi il numero cercato $Z^{(5,3)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 4$, le quali maniere sono $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$, $5 = 1 + 2 + 2$, $5 = 1 + 4$.

39. Sia finalmente z_x il termine generale de' numeri primi della forma $4m + 1$; in questo caso nel valore di δy dovranno prendersi i soli termini, che sono numeri primi della forma $4m + 1$ non maggiori di z_x. Se per esempio si cerca in quante maniere il numero 7 può esser la somma de' numeri primi della forma $4m + 1$, sarà $\delta y = \delta 7 = 1$, $\delta 6 = 1$, $\delta 5 = 5 + 1 = 6$, $\delta 4 = 1$, $\delta 3 = 1$, $\delta 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{6}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 2$, le quali maniere sono $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $7 = 1 + 1 + 5$.

PROBLEMA XI.

40. *Data una serie di numeri qualunque, della quale il termine generale sia z_x, trovare in quante maniere il numero y può nascere dalla somma di termini diversi di questa serie, continuata fino al termine z_x.*

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e supponghiamo $y = pz_1 + qz_2 + rz_3 + \ldots + tz_x$. Per la natura del Problema ciascuna delle quantità p, q, ecc. non può essere che $= 0$, oppure $= 1$; quindi il numero delle maniere cercato sarà uguale alla somma de' numeri delle maniere, che nascono dal fare $t = 0$, e $t = 1$. Ma facendo $t = 0$, e $t = 1$, $Z^{(y,x)}$ diventa $Z^{(y,x-1)}$, e $Z^{(y-z_x,x-1)}$; dunque l'equazione del Problema sarà

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y,x-1)} + Z^{(y-z_x,\, x-1)}$$

Per integrar questa equazione facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x = 1 + b^{-z_x}$, e $\nabla\alpha_x = (1+b^{-z_1})(1+b^{-z_2})(1+b^{-z_3})\ldots(1+b^{-z_x})$. Ponghiamo

$$\nabla\alpha_x = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

e supponendo $\gamma m = m - \frac{m}{2} + \frac{m}{3} - \frac{m}{4} \ldots \pm \frac{m}{m}$, ma prendendo di questa serie solo i termini interi non maggiori di z_x, e della forma z_x, è facile il vedere che avremo (2)

$$A^{(m)} = \frac{\gamma m}{m} + \gamma 1 \frac{\gamma(m-1)}{m} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\gamma 3}{3} + \gamma 1 \frac{\gamma 2}{3} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma 1}{3}\right)\frac{\gamma(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Posto questo valore di $A^{(m)}$, avremo

$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$ ove $\phi y = Z^{(y,0)}$. Ma $Z^{(y,0)} = 1$ nel solo caso di $y = 0$, negli altri casi $Z^{(y,0)} = 0$; dunque $Z^{(y,x)} = A^{(y)}$.

41. Sia $z_x = x$, cioè la serie proposta sia quella de' numeri naturali; in questo caso prendendo nel valore di $\gamma.m$ tutt' i termini interi minori di x, avremo

$$Z^{(y,x)} = \frac{\gamma y}{y} + \gamma 1 \frac{\gamma(y-1)}{y} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $y = 5$, $x = 4$, avremo $\gamma y = \gamma 5 = 1$, $\gamma 4 = 4 - 2 - 1 = 1$, $\gamma 3 = 3 + 1 = 4$, $\gamma 2 = 1$, $\gamma 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}$

+

$+\frac{2}{5}=2$, le quali maniere sono $5=1+4$, $5=2+3$.

42. Ripigliamo l' equazione appartenente a questo caso

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y,x-1)}+Z^{(y-x,x-1)}$$

e ponendovi $y-x$ in luogo di y

$$Z^{(y-x,x)}=Z^{(y-x,x-1)}+Z^{(y-2x,x-1)}$$

e sostituendo nella prima il valore di $Z^{(y-x,x-1)}$ preso da questa

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y,x-1)}-Z^{(y-2x,x-1)}$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x=\frac{1-b^{-2x}}{1-b^{-x}}$, e

$\nabla\alpha_x=\frac{(1-b^{-2})(1-b^{-4})....(1-b^{-2x})}{(1-b^{-1})(1-b^{-2}).....(1-b^{-x})}$; e ponendo x infinito

$\nabla\alpha_x=\frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-3})(1-b^{-5}).....}$, ove gli esponenti di b sono i numeri dispari. Quindi $Z^{(y,x)}$ avrà in questo caso il medesimo valore, che ha al n°. 36. (formola seconda); onde nasce il Teorema. In tante maniere il numero y può formarsi dalla somma di numeri disuguali, in quante il medesimo numero y può essere la somma di numeri dispari o uguali tra loro o disuguali. Similmente paragonando la formola del n°. 36. con quella del n°. precedente troveremo quest' altro curioso Teorema; cioè $\delta.y=\gamma.y$, o sia

$$y+\frac{y}{2}+\frac{y}{3}+....+\frac{y}{y}=y-\frac{y}{2}+\frac{y}{3}-\frac{y}{4}+.....\pm\frac{y}{y}$$

prendendo nel primo membro solo i termini interi, e dispari; nel secondo i termini interi. Il Teorema è evidente se y è dispari, ma è ugualmente vero se y è pari.

43. Sia $z_x=c^{x-1}$, cioè si abbia la serie geometrica

$1, c, c^2, ...c^{x-1}$, e prendendo nel valore di

$\gamma m=m-\frac{m}{2}+\frac{m}{3}-\frac{m}{4}+....\pm\frac{m}{m}$ solo i termini interi non maggiori di c^{x-1} e di questa forma, avremo

$$Z^{(y,x)} = \frac{\gamma y}{y} + \gamma 1 \frac{\gamma(y-1)}{y} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right) \frac{\gamma(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per esempio in quante maniere il numero 5 può esser la somma di numeri diversi presi tra i termini della progressione 1, 2, 4. Sarà $x=3$, $c=2$, $y=5$, $\gamma y = \gamma 5 = 1$, $\gamma 4 = 4 - 2 - 1 = 1$, $\gamma 3 = 1$, $\gamma 2 = 2 - 1 = 1$, $\gamma 1 = 1$, e $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$.

Generalmente se supporremo x comunque grande, cioè se non sarà più limitato il numero de' termini della progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, ecc. si toglierà la condizione di prendere dal valore di $\gamma . m$ i numeri non maggiori di 2^{x-1}. Sarà dunque $\gamma . m$ della forma $2^m - 2^{m-1} - 2^{m-2} - \ldots - 2 - 1$, cioè sarà sempre $= 1$. Quindi $Z^{(y,x)}$ sarà sempre $= 1$ qualunque sia il numero y. Abbiamo adunque questo Teorema: che qualunque numero può nascere dalla somma di termini diversi della progressione geometrica 1, 4, 8, ecc. in una sola maniera.

44. Quei teoremi, che abbiamo in qua e in là osservati, sono già stati per la maggior parte ritrovati dal Sig. Eulero. Noi gli abbiamo dedotti dalla soluzione de' diversi problemi; ma dall' equazione de' medesimi potevano subito senza alcuna integrazione ritrovarsi, come insegnano i seguenti Problemi, i quali insieme ci aprono la strada a ritrovare molti altri simili teoremi.

PROBLEMA XII.

45. *Date le due seguenti equazioni*

$$Z^{(y,x)} = A_x Z^{(y-\varphi . x,\, x)} + B_x Z^{(y-f.x,\, x-1)}$$

$$\Pi^{(y,x)} = A_x Z^{(y-\varphi . x,\, x)} + B_x Z^{(y-f'.x,\, x-1)}$$

composte di tre termini, nelle quali i coefficienti respettivi siano uguali, e i primi due termini siano della medesima forma, ridurre l' integrazione della seconda equazione alla integrazione della prima.

Facciamo $\Pi^{(y,x)} = z^{(y - F.x, x)}$, e sostituendo questo valore nella seconda equazione essa diventerà

$$z^{(y - F.x, x)} = A_x z^{(y - \phi.x - F.x, x)} + B_x z^{(y - f'.x - F(x-1), x-1)}.$$

Ma dalla prima equazione abbiamo

$$z^{(y - F.x, x)} = A_x Z^{(y - \phi.x - F.x, x)} + B_x Z^{(y - f.x - F.x, x-1)},$$

Dunque $y - f'.x - F(x-1) = y - f.x - F.x$, cioè $F.x - F(x-1) = f'.x - f.x$, e $F.x = \Sigma\big(f'(x+1) - f(x+1)\big) + \text{Cost.}$ La costante si determinerà così. Sia $\Sigma f'(x+1) - \Sigma f(x+1) = a$ nel caso di $x=1$, e si abbia $\Pi^{(y,1)} = Z^{(y-b,1)}$, avremo $F.1 = b$, e Cost. $= b - a$.

46. Si abbiano per esempio le due equazioni

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y,x-1)}$$
$$\Pi^{(y,x)} = \Pi^{(y-x,x)} + \Pi^{(y-x,x-1)}$$

la prima delle quali appartiene al n°. 25, la seconda al n°. 20. Avremo $F.x = \Sigma(x+1) = \frac{x(x+1)}{2} + \text{Cost.}$ Ora si osservi che

$$Z^{(0,1)} = 1,\ Z^{(1,1)} = 1,\ Z^{(2,1)} = 1,\ \text{ecc.}$$
$$\Pi^{(0,1)} = 0,\ \Pi^{(1,1)} = 1,\ \Pi^{(2,1)} = 1,\ \text{ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y,1)} = Z^{(y-1,1)}$, cioè $b=1$, $a=1$, e la costante $=0$: quindi $F.x = \frac{x(x+1)}{2}$, e $\Pi^{(y,x)} = Z^{(y - x(x+1):2,\, x)}$.

Di qui nasce il Teorema: In quante maniere il numero y può dividersi in x parti disuguali, in altrettante il numero $y - \frac{x(x+1)}{2}$ può nascere dalla somma de' numeri $1, 2, 3, \ldots x$.

47. Più generalmente si abbiano l' equazioni

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-nx,x)} + Z^{(y,x-1)}$$

$$\Pi^{(y,x)} = \Pi^{(y-nx,x)} + \Pi^{(y-n(x-1)-m,x-1)},$$

che sono quelle de' numeri 34, e 29. Sarà $F.x = \Sigma(nx+m)$ $= n\frac{x(x-1)}{2} + mx +$ Cost. Ma sappiamo essere

$$Z^{(0,1)} = 1,\ Z^{(n,1)} = 1,\ Z^{(2n,1)} = 1, \text{ ecc.}$$

$\Pi^{(0,1)} = 0$, $\Pi^{(m,1)} = 1$, $\Pi^{(m+n,1)} = 1$, $\Pi^{(m+2n,1)} = 1$, ecc. e quindi $\Pi^{(y,1)} = Z^{(y-m,1)}$. Dunque $b = m$, $a = m$, e Cost. $= m - m = 0$, cioè $\Pi^{(y,x)} = Z^{(y-mx-nx(x-1):2,x)}$: onde in tante maniere il numero y può esser la somma di x termini della serie m, $m+n$, $m+2n$, ecc. disuguali tra loro, in quante il numero $y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}$ può nascere dalla somma de' numeri n, $2n$, $3n$, ... xn.

PROBLEMA XIII.

48. *Più generalmente date l' equazioni*

$$Z^{(y,x)} = A_x Z^{(y-\phi.x,x)} + B_x Z^{(y-f.x,x-1)}$$

$$\Pi^{(y,x)} = A_x \Pi^{(y-m\phi.x,x)} + B_x \Pi^{(y-f'.x,x-1)}$$

ove m *è costante, ridurre l' integrazione della seconda equazione a quella della prima.*

Facciamo $\Pi^{(y,x)} = Z^{((y-F.x):m,\,x)}$, e la seconda equazione diventerà

$$Z^{((y-F.x):m,\,x)} = A_x Z^{((y-m\phi.x-F.x):m,\,x)}$$

$$+ B_x Z^{((y-f'.x-F(x-1)):m,\,x-1)}$$

Ma ponendo nella prima equazione $y - \frac{(m-1)y+F.x}{m}$ in luogo di y avremo

$$Z^{((y-F.x):m\,,\,x)} = A_x\, Z^{((y-m\phi.x-F.x):m\,,\,x)}$$

$$+ B_x\, Z^{((y-mf.x-F.x):m\,,\,x-1)}$$

Dunque $y - mf.x - F.x = y - f'.x - F(x-1)$, cioè $F.x - F(x-1) = f'.x - mf.x$, e integrando $F.x = \Sigma f'(x+1) - m\Sigma f(x+1) +$ Cost. e la costante si determinerà come sopra.

49. Si abbiano per esempio l' equazioni de' numeri 19, e 22,

$$Z^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-x\,,\,x)} + Z^{(y-1\,,\,x-1)}$$
$$\Pi^{(y\,,\,x)} = \Pi^{(y-2x\,,\,x)} + \Pi^{(y-1\,,\,x-1)}.$$

Sarà $F.x = \Sigma(1-2) = -x +$ Cost. per determinare questa costante si osservi che

$$Z^{(1\,,\,1)} = 1,\ Z^{(2\,,\,1)} = 1,\ Z^{(3\,,\,1)} = 1,\ \text{ecc.}$$
$$\Pi^{(1\,,\,1)} = 1,\ \Pi^{(2\,,\,1)} = 0,\ \Pi^{(3\,,\,1)} = 1,\ \text{ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y\,,\,1)} = Z^{((y+1):2\,,\,1)}$, e la Cost. $= 0$; avremo perciò $\Pi^{(y\,,\,x)} = Z^{((y+x):2\,,\,x)}$, e quindi il Teorema: In quante maniere il numero y può dividersi in x parti dispari, in altrettanti il numero $\frac{y+x}{2}$ può dividersi in x parti o pari o dispari.

50. Siano proposte l' equazioni de' numeri 19, e 27,

$$Z^{(y\,,\,x)} = Z^{(y-x\,,\,x)} + Z^{(y-1\,,\,x-1)}$$
$$\Pi^{(y\,,\,x)} = \Pi^{(y-nx\,,\,x)} + {}^{(y-m\,,\,x-1)}$$

Avremo $F.x = \Sigma(m-n) = (m-n)x +$ Cost. Ora si rifletta che i valori di $\Pi^{(y\,,\,x)}$ vanno con quest' ordine;

$$\Pi^{(m\,,\,1)} = 1,\ \Pi^{(m+n\,,\,1)} = 1,\ \Pi^{(m+2n\,,\,1)} = 1,\ \text{ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y\,,\,1)} = Z^{((y-m+n):n\,,\,1)}$, quindi la Cost. $= 0$, e $\Pi^{(y\,,\,x)} = Z^{((y-(m-n)x):n\,,\,x)}$. Onde in tante maniere il numero y è la somma di x termini della serie m, $m+n$, $m+2n$, ecc; in quante il numero $\frac{y-(m-n)x}{n}$ è la somma di x termini della serie naturale. Col metodo medesimo paragonando tra loro le altre equazioni di sopra ritrovate, se ne dedurranno altri Teoremi.

OSSERVAZIONE ANATOMICA

SOPRA UN VITELLO-VACCA DETTO DAGL' INGLESI FREEMARTIN.

Del Sig. ANTONIO SCARPA Pubblico Profeſſore di Notomia, ed Operazioni chirurgiche nella R. Univerſità di Pavia.

E' Stato mai ſempre un oggetto di curioſità, e di ricerche, ſe fra gli animali che noi chiamiamo perfetti ſi generino alcune volte degl' individui che dotati ſiano del doppio ordine d' organi maſchile, e femmineo. Preſſo gli antichi Scrittori ſi trovano regiſtrate molte oſſervazioni relative a queſt' argomento; ma, per dir vero, sì poco dettagliate, che ſottopoſte ad un rigoroſo eſame hanno dato luogo a dubitare grandemente della verità di tali fatti, o perchè fondati unicamente ſopra eſterne fallaci apparenze, o perchè non abbaſtanza confermati da una minuta, e perita ſezione delle parti deſtinate all' uſo della generazione. Sembra dalle imperfette loro relazioni che la ſola apparenza d' una feſſura nel perineo, l' incompleta diſceſa dei teſticoli, la brevità, o deviazione dell' uretra nei maſchi, e lo ſproporzionato allungamento della clitoride nelle femmine ſiano ſtati riguardati da loro come motivi baſtanti per decidere della preſenza dei due ſeſſi combinati in un medeſimo individuo. Quindi è che il celebre *Hallero* (1) dopo un critico eſame di tali fatti confrontati con altri ſimili ha creduto di dare a ciaſcheduna oſſervazione di queſto genere il ſuo giuſto valore riducendo tutte le ſtorie dei preteſi Ermafroditi a due claſſi principali di deformità; una cioè che riſulta dalla non naturale forma, ſede, ſviluppo delle parti maſchili; l' altra dal non ordinario ingrandimento della clitoride nelle femmine. Non ha laſciato però

(1) *Num dentur* Hermaphroditi *Comment.*

questo grand' uomo d' avvertire, che trattandosi d' una opinione ricevuta per tanti secoli, ed accreditata dall' asserzione di molti Scrittori, ed in tempi diversi, vi poteva essere non ostante qualche cosa di vero (2). Avvi per appunto qualche cosa di vero nell' antica opinione degli Ermafroditi fra gli animali detti perfetti, e sembra che avesse dovuto meritare molto prima l' attenzione dei curiosi della natura un fatto relativo a questo argomento, il quale oltre d' esser sommamente rimarcabile per la sua frequenza e costanza, qual principio immutabile nella propagazione d' alcune specie d' animali perfetti, lo è poi grandemente per somministrare una prova convincente, che anco fra gli animali perfetti si generano alcune volte degl' individui, i quali benchè a tutto rigore di vocabolo dir non si possano veri, e completi Ermafroditi, però forniti sono or più or meno d' ambedue i sessi misti, e combinati in un medesimo soggetto.

Egli è un fatto avverato, e costante, noto fin al volgo degli agricoltori, che ogni qualvolta una vacca depone due gemelli, e che uno di questi sia decisamente maschio, l' altro sembri femmina, questo secondo non è precisamente bene nè l' uno nè l' altra, ma si trova fornito degli organi d' ambedue i sessi con più, o meno di perfezione. Il primo diviene un toro nella via ordinaria. Il secondo arrivato alla maturità non mostra la più picciola inclinazione per il toro, nè il toro per lui. Non così succede se ambedue i gemelli sono femmine, o maschi (3).

---

(2) *Ibidem. Quæ omnia*, dice egli, *ut non satis anatomica, aut ad persuadendum firma sunt; ita certe suspicionem tamen non absurdam movent veri quid in opinione esse, in qua adeo multi homines tam diversis temporibus consenserint. Raro enim fit, ut his late patentibus opinionibus nihil veri subsit. Id poliporum exemplo apparet, quorum renascentia brachia recentior industria confirmavit, & innumeris aliis argumentis, quæ deprecari culpam quotidie nos cogunt, & antiquorum hominum curiositatem venerari, quam tamquam fabulosam spreveramus.*

(3) Quantunque non apparisca chiaramente che i Romani conosciuto abbiano tutte queste circostanze, però egli è certo che nei loro scritti d'agricoltura hanno fatto menzione di quest' animale, e che l' hanno distinto dalla vacca col nome di *Taura*. Columella *de Re Rust.* lib. VI. Cap. XXII. *sed & curandum est*, dice egli, *omnibus annis in hoc æque, atque in reliquis gregibus pecoris, ut delectus habeatur; nam, & enixæ, & vetustæ quæ gignere desierunt summovendæ sunt, & utique* Tauræ, *quæ locum fœcundarum occupant ablegandæ, vel aratro*

Il Sig. Giovanni *Hunter* uomo d' acuto ingegno, ed uno dei più felici indagatori della natura, ha sottoposto tre di questi animali a una diligente notomia, e nell' anno 1779 ha comunicato sopra questo proposito le sue osservazioni alla R. Società di Londra. Riferirò qui brevemente il resultato delle osservazioni del Sig. *Hunter* onde render più chiaro quanto sono per soggiungere sopra questo stesso argomento.

Nel primo di questi animali esaminati dal Sig. *Hunter* di sett' anni circa le parti esterne della generazione erano più piccole che nella vacca. La vagina al di là dell' orifizio dell' uretra ristrettasi maggiormente si stendeva sin all' utero, a cui era aperto l' adito alla divisione di esso nelle due corna. Le corna dell' utero si allungavano in ciaschedun lato secondando il margine del legamento largo. Ove finivano le corna dell' utero, risiedevano le ovaja, ed accanto a queste i testicoli. Mancavano le trombe falloppiane. I vasi deferenti erano imperfetti; il destro solamente continuava sin vicino al testicolo. Pervj però ambedue questi canali inferiormente si aprivano nella vagina in vicinanza dell' orifizio dell' uretra. Dietro la vescica, cioè fra questa e l' utero, si trovavano le vescichette seminali. Queste parimente si aprivano nella vagina insieme coi condotti deferenti.

Nel secondo di questi animali di cinque anni la vagina poco al di là dell' orifizio dell' uretra finiva in un sacco cieco. L' utero, benchè impervio, si divideva secondo il solito nelle due corna, all' estremità delle quali in luogo delle ovaja erano collocati i testicoli. Che poi fossero i testicoli si conosceva 1°. Dall' esser' venti volte più grandi dell' ovaja nella vacca, e quasi della grandezza dei testicoli del toro prima che discendano dal ventre. 2°. Dalle arterie del cordone spermatico simili a quelle del toro. 3°. Dal muscolo cremastere, che dall' anello dei muscoli del basso ventre si curvava

domandæ, quoniam laboris, & operis non minus quam juvenci, propter uteri sterilitatem, patientes sunt.

M. Varrone parimente *de Re Rust.* lib. II. Cap. V. fa menzione di quest' animale. *Discernuntur*, dice egli, *in prima vitulus, & vitula: in secunda juvencus, & juvenca: in tertia, & quarta taurus, & vacca. Quæ sterilis est vacca* Taura *appellata*. Sotto le medesime circostanze accade di vedere la produzione d'un esser simile anco nei cavalli, asini, e pecore.

vava all' insù per involgere il testicolo. Mancavano i condotti deferenti. Fra l'utero poi e la vescica urinaria v'erano le vescichette seminali, i condotti delle quali si aprivano nella vagina.

Il terzo di questi animali era fra i tre, e quattr' anni. La vagina esternamente, come nella vacca, finiva internamente, ed un po' al di là dell' orifizio dell' uretra in un sacco cieco. L' utero chiuso, diviso nelle due corna all' estremità delle quali risiedevano le ovaja. Mancavano i testicoli. Solo accanto dell' utero si vedeva un vaso deferente con molte interruzioni. Fra l' utero e la vescica comparivano le vescichette seminali, ed in vicinanza di queste le estremità dei condotti deferenti, coi quali comunicando le vescichette si aprivano insieme nella vagina, come nelle osservazioni precedenti.

Desideroso io pure di replicare queste osservazioni mi sono diretto a S. E. Marchese Gherardo *Rangone* Ministro, e Segretario di Stato di S. A. S. Duca di Modena, Cavaliere d' elevati talenti, e noto già per lo zelo efficace in promovere le scienze, affinchè ottener potessi l' opportunità di riscontrare questi fatti. Alla prima ricerca nei vicini poderi dell' E. S. si è trovato che una vacca aveva deposto pochi giorni prima due gemelli uno maschio, l' altro apparentemente femmina. Senza cercare più oltre ha ordinato l' E. S. che fosse custodita, e nudrita la femmina. In capo a tredici mesi circa ne ho fatto la sezione in presenza dell' E. S., del Cav. *Rosa*, e Professore *Savani*, ambedue allora miei Colleghi. L' esterna configurazione di tutto il corpo di quest' animale aveva molto del toro. Sotto il ventre comparivano i capezzoli, ed i corpi glandulari delle poppe. L' esterne parti genitali erano più piccole che nella vitella d' un anno. Dall' angolo superiore delle labbra sortiva un corpicciolo (4) che alzandosi verso l' ano curvava la punta all' indietro a guisa d' uncino. Dietro l' apice di questo corpicciolo stava nascosto l' orifizio dell' uretra (5). La vagina incurvata sotto l' ure-

(4) *BBBB*
(5) *C.*

tra si stendeva internamente per lo spazio di tre dita trasverse (6), poi finiva in un sacco cieco. L' interna superficie della vagina era tutta sparsa di rughe molli, e polpose. Il fondo cieco di questo canale era posteriormente unito per mezzo d' una cellulare compatta ad un corpo cavernoso (7) che nato dall' ischio destro, e ripiegato alquanto in se stesso si allungava posteriormente, e superiormente sin' a formare quel corpicciolo, che si vedea spuntare dall' angolo superiore delle labbra. Paragonato questo corpo colla clitoride della vacca ho trovato che ne aveva una grande somiglianza, sì perchè la clitoride stessa vicino alla sua origine si ripiega, ed attortiglia alquanto in se stessa; come perchè il suo corpo cavernoso non mostra internamente alcun tramezzo, e finisce essa pure in un apice acuto, ed un po' ricurvo. La principale, e forse sola differenza consisteva nella sede; poichè la clitoride nella vacca scorre sotto la vagina, e spunta all' angolo inferiore delle labbra; mentre nell' animale di cui si parla era collocata la clitoride sopra la vagina, ed esciva sotto l' angolo superiore delle labbra.

Aperto il ventre onde esaminare gl' interni organi genitali, si è osservato che i testicoli (8) erano rimasti molto alti nel ventre; un po' più piccoli che nel toro d' un anno; ma però ben conformati, e sviluppati, tanto esternamente, che nell' interna tessitura. Detratto il muscolo cremastere, da cui ciaschedun era cinto, si vedea partire dall' epididimo il vaso deferente, che dirigeva il suo corso discendendo verso la faccia posteriore della vescica. Ivi collocate erano le vescichette seminali (9) colle quali comunicavano i vasi deferenti, e si allungavano insieme inferiormente in un condotto comune. Tanto le vescichette, che i vasi deferenti erano pieni d' un umor giallognolo. Cingeva il collo della vescica urinaria un grosso corpo glandolare (10) simile alla prostata, il quale abbracciava insieme l' uretra quasi per tutta la

---

(6) *AAA*.
(7) *BBB*.
(8) *KK*.
(9) *GG*.
(10) *DDDD*.

sua estensione. Aperta la vescica, e l' uretra secondo la loro lunghezza, ed introdotto uno specillo per entro ciascheduno dei vasi deferenti, sono comparsi questi nell' uretra (11) ai lati d' una prominenza che tenea luogo di capo gallinaceo. Immediatamente sotto gli orifizj comuni ai vasi deferenti, e vescichette seminali l' uretra si profondava a guisa d' una fossa ellittica scavata nel grosso, e polposo corpo della prostata (12) con qualche apparenza di ciò che chiamiamo bulbo dell' uretra; indi l' uretra nuovamente ristretta, e sempre cinta dalla prostata scorrendo un po' obliquamente all' insù si apriva esternamente, come è stato accennato, all' angolo superiore delle labbra.

Per poco che si rifletta sopra la costruzione degli organi genitali di questo animale apparisce chiaramente che gl' interni dagli orifizj dei vasi seminali all' insù erano perfettamente maschili, e gli esterni femminei, se non del tutto almeno in gran parte, sì per la presenza della vagina, e brevità dell' uretra, che per il corpo cavernoso, il quale non differiva dalla clitoride, che nell' esser collocato nella parte superiore della vagina.

Confrontando questa osservazione con quelle del Sig. *Hunter*, parmi di potere inferire, che sì in quelle, che in questa vi era un misto d' organi maschili, e femminei, colla differenza, che negli animali esaminati dal Sig. *Hunter* gli organi genitali interni erano un composto d' ambedue i sessi con più, o meno di perfezione; in questo di cui ho riportata la storia gl' interni erano unicamente e perfettamente maschili, gli esterni femminei

Son ben lontano dall' asserire che tanto quegli animali, che questo meritassero il nome di veri, e completi Ermafroditi, a rigore di vocabolo. Solo mi ristringo ad osservare, e provare ulteriormente, che anco negli animali perfetti, sotto certe determinate circostanze, si generano degl' individui, che forniti sono in un degli organi proprj di ciascheduno ses-

(11) *F*.
(12) *E*.

ſo, e che la natura ha, per così dire, fatto un paſſo anco negli animali detti perſetti verſo la coſtruzione d' un eſſere androgeno.

Vi ſono, come abbiamo indicato, delle varietà nella preponderanza degli organi dell' uno, o dell' altro ſeſſo combinati, e miſti in un medeſimo ſoggetto nei diverſi individui. Quindi è che io mi propongo d'eſaminare molti altri di queſti animali, e nelle varie claſſi in cui ſi generano, onde regiſtrarne le diverſe combinazioni.

Spiegazione della Tavola.

Il collo della veſcica, la proſtata, e l' uretra aperte inferiormente, cioè dalla parte del ventre dell' animale, poi rivolte all' insù, onde vedere più diſtintamente gli orifizj dei vaſi ſeminali nell' uretra. Le parti eſterne genitali ſono nella ſituazione loro naturale.

AAA. La vagina aperta.

BBB. Corpo cavernoſo ſimile alla clitoride.

C. L' orifizio dell' uretra.

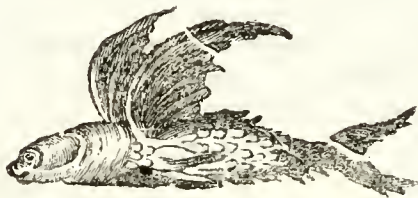
DDDD. La proſtata.

E. Foſſa ellittica dell' uretra.

F. Gli orifizj dei vaſi ſeminali entro l' uretra.

GG. Le veſcichette ſeminali.

HH. L' eſtremità dei vaſi deferenti.

KK. I teſticoli.

OPPOSIZIONE

DEL NUOVO PIANETA

Oſſervata nel 1781

Dal Sig. Giuseppe Slop de Cadenberg Profeſſore d' Aſtronomia nell' Univerſità di Piſa.

FU oſſervato il pianeta il dì 22 e 23 Decembre al Quadrante *Murale* inſieme con le ſtelle η e μ dei Gemini e con una piccola ſtella, che nel Catalogo di Tobia Mayer è notata al n.° 245. La troppa vicinanza fra i paſſaggi del pianeta e delle ſtelle η e 245 dei Gemini per il meridiano non ha permeſſo di oſſervare alle diviſioni del Quadrante la diſtanza delle due ſtelle dal vertice, onde non ſi è potuta notare la differenza fra la loro declinazione e quella del pianeta. Nella riduzione delle oſſervazioni ſi è fatto uſo per le ſtelle η e 245 dei luoghi preſi dal Catalogo di *Mayer*, e per la ſtella μ di quelli del Catalogo di *Bradlej*, e ſi è tenuto conto dei piccoli moti apparenti delle ſtelle dal dì 22 al dì 23 Decembre. I luoghi delle predette ſtelle ſono tutti calcolati per il dì 22 Decembre.

Dal Catalogo di Bradlej.

η dei Gemini	Aſcenſione retta	3^s. 0^g. 26′. 2″, 6
	Declinazione boreale	0. 22. 33. 15, 1
μ dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 2. 26. 44, 4
	Declinazione boreale	0. 22. 36. 37, 4

Dal Catlogo di ſtelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

η dei Gemini	Aſcenſione retta	3. 0. 26. 52, 4
	Declinazione boreale	0. 22. 33. 20, 9

μ dei Gemini Ascensione retta . . . . . 3ˢ. 2ᵍ. 26′. 35″, 9
Declinazione boreale 0. 22. 36. 42, 2

Dal Catalogo delle stelle Zodiacali di Tobia Mayer.

η dei Gemini Ascensione retta 3. 0. 25. 59, 3
Declinazione boreale 0. 22. 33. 18, 7
Stella 245.ᵐᵃ Ascensione retta 3. 1. 24. 33, 4
Declinazione boreale 0. 23. 40. 21, 5
μ dei Gemini Ascensione retta 3. 2. 26. 37, 9
Declinazione boreale 0. 22. 36. 41, 1

Il dì 22 *Decembre tempo medio* 11.ᵒʳᵉ 55′. 58″.

Differenza osservata fra il pianeta ed η dei Gemini
In Ascensione retta . . . . + 0. 0. 28. 56, 4
Ascensione retta del pianeta 3. 0. 54. 55, 7

22 *Decembre t. m.* 11.ᵒʳᵉ 55′. 58″

Differenza osservata fra il pianeta e la stella 245.ᵐᵃ
In Ascensione retta . . . . — 0. 0. 29. 31, 4
Ascensione retta del pianeta 3. 0. 55. 2, 0

22 *Decembre t. m.* 11.ᵒʳᵉ 55′. 58″

Differenza osservata fra il pianeta e μ dei Gemini
In Ascensione retta . . . . — 0. 1. 31. 46, 5
In Declinazione . . . . + 0. 1. 6. 36, 5
Differenza in Declinazione corretta dalla
refrazione . . . . + 0. 1. 6. 37, 7
Ascensione retta del pianeta 3. 0. 54. 57, 9
Declinazione boreale 0. 23. 43. 15, 1

Fatta una giusta estimazione delle osservazioni (1) si hanno per l' istesso tempo

(1) Vedi *Novi planetæ observationes & theoria* pag. 26.

I luoghi apparenti del pianeta.

Ascensione retta	3ˢ.	0ᵍ.	54′.	57″,	5
Declinazione boreale	0.	23.	43.	15,	1
Longitudine	3.	0.	50.	18,	94
Latitudine boreale	0.	0.	15.	11,	8

Il 23 Decembre tempo medio 11.ᵒʳᵉ 51′. 55″

Differenza osservata fra il pianeta ed η dei Gemini

In Ascensione retta	+ 0.	0.	26.	7,	6
Ascensione retta del pianeta	3.	0.	52.	7,	2

23 *Decembre t. m.* 11.ᵒʳᵉ 51′. 55″

Differenza osservata fra il pianeta e la stella 245.ᵐᵃ

In Ascensione retta	— 0.	0.	32.	20,	7
Ascensione retta dal pianeta	3.	0.	52.	12,	9

23 *Decembre t. m.* 11.ᵒʳᵉ 51′. 55″

Differenza osservata fra il pianeta e μ dei Gemini

In Ascensione retta	— 0.	1.	34.	36,	2
In Declinazione	+ 0.	1.	6.	36,	7
L' istessa corretta dalla refrazione . . .	+ 0.	1.	6.	37,	9
Ascensione retta del pianeta	3.	0.	52.	8,	4
Declinazione boreale	0.	23.	43.	15,	3

Onde fatta l' estimazione delle osservazioni si avranno per l' istesso tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

Ascensione retta	3.	0.	52.	8,	5
Declinazione boreale	0.	23.	43.	15,	3
Longitudine	3.	0.	47.	44,	18
Latitudine boreale	0.	0.	15.	11,	0

La longitudine del Sole per il tempo dell' osservazione del dì 22 Decembre si ha secondo le tavole del *Mayer* 9ˢ. 1ᵍ.

36'. 13", 5, onde in quel tempo era già ſeguita l'oppoſizione, e col moto relativo del pianeta dal Sole era ſtato percorſo un arco di 0^s. 45'. 54", 6.

Il moto del pianeta in longitudine dal dì 22 al 23 Decembre fu di 0^g. 2'. 34", 76, onde il ſuo moto diurno ſi ha di 0^g. 2'. 35", 19, col qual moto e col moto diurno del Sole 1°. 1'. 9", 5, il ſurriferito arco fu percorſo in $17.^{ore}$ 17'. 9", quali ſottratte dal tempo dell' oſſervazione del 22 Decembre danno l' apparente oppoſizione per il dì 21 dell' iſteſſo meſe a $18.^{ore}$ 38'. 49" di tempo medio. La longitudine del Sole era in quel tempo 9^s. 0^g. 52'. 10", 7, e perciò la longitudine apparente geocentrica del pianeta nel momento dell' oppoſizione 3^s. 0^g. 52'. 10", 7.

Per avere la longitudine eliocentrica biſogna correggere la longitudine geocentrica con due equazioni, la prima di − 8", 0 per l' aberrazione e nutazione del pianeta (2), la ſeconda di + 1, 0 per l' aberrazione del Sole (3), onde la longitudine vera eliocentrica era 3^s. 0^g. 52'. 3", 7, alla quale aggiungendo 6", 1 ſi avrà la longitudine nell' orbita per il momento dell' oppoſizione 3^s. 0^g. 52'. 9", 8.

Oppoſizione del nuovo pianeta oſſervata l' anno 1782.

Le oſſervazioni furono fatte come le precedenti al Quadrante *Murale*. Il pianeta fu paragonato alle ſtelle *H*, η, e μ della coſtellazione dei Gemini nelle notti dei 22 e 25 Decembre. Nel dedurne i luoghi del pianeta ci ſiamo ſerviti del Catalogo di *Mayer* per la ſtella η, e del Catalogo di *Bradlej* per le ſtelle *H* e μ avendo riguardo ai loro piccoli moti apparenti dal 22 al 25 Decembre. I luoghi delle fiſſe ſono deſcritti per il dì 15 dell' iſteſſo meſe.

Dal

(2) Vedi *Obſervationes ſiderum habitæ Piſis ab anno* 1774 *ad annum* 1778 pag. 122.

(3) Vedi *Novi Planetæ obſervationes & theoria* pag. 16 e 17.

Dal Catalogo di Bradlej.

H dei Gemini Afcenfione retta	2ˢ. 27ᵍ. 44′. 16″, 8
Declinazione boreale	0. 23. 15. 36, 5
η dei Gemini Afcenfione retta	3. 0. 27. 3, 9
Declinazione boreale	0. 22. 33. 15, 5
μ dei Gemini Afcenfione retta	3. 2. 27. 45, 5
Declinazione boreale	0. 22. 36. 37, 1

Dal Catalogo di ftelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

H dei Gemini Afcenfione retta	2. 27. 44. 10, 4
Declinazione boreale	0. 23. 15. 38, 6
η dei Gemini Afcenfione retta	3. 0. 27. 53, 7
Declinazione boreale	0. 22. 33. 21, 3
μ dei Gemini Afcenfione retta	3. 2. 27. 36, 1
Declinazione boreale	0. 22. 36. 41, 9

Dal Catalogo di Mayer.

H dei Gemini Afcenfione retta	2. 27. 44. 19, 4
Declinazione boreale	0. 23. 15. 39, 1
η dei Gemini Afcenfione retta	3. 0. 27. 0, 6
Declinazione boreale	0. 22. 33. 19, 1
μ dei Gemini Afcenfione retta	3. 2. 27. 39, 0
Declinazione boreale	0. 22. 36. 40, 8

Il 22 Decembre a 12.ᵒʳᵉ 17′. 17″. di tempo medio.

Differenza offervata fra il pianeta ed *H* dei Gemini

Nell' Afcenfione retta	+ 0. 8. 16. 50, 8
Nella Declinazione	+ 0. 0. 24. 29, 0
Nell' isteffa corretta dalla refrazione	+ 0. 0. 24. 29, 4
Afcenfione retta del pianeta	3. 6. 1. 6, 7
Declinazione boreale	0. 23. 40. 5, 9

22 *Decembre* 12.ore 17'. 17''. *t. m.*

Differenza osservata fra il pianeta ed η dei Gemini
Nella retta Ascensione . . . . + 0s. 5g. 34'. 0'', 6
Nella Declinazione . . . . + 0. 1. 6. 47, 2
Differenza nella Declinazione corretta dalla refrazione . . . . + 0. 1. 6. 48, 4
Ascensione retta del pianeta 3. 6. 1. 0, 7
Declinazione boreale 0. 23. 40. 7, 5

22 *Decembre* 12.ore 17'. 17''. *t. m.*

Differenza osservata fra il pianeta e μ dei Gemini
In Ascensione retta . . . . + 0. 3. 33. 19, 3
In Declinazione . . . . + 0. 1. 3. 30, 9
L' istessa corretta dalla refrazione . . . + 0. 1. 3. 32, 0
Ascensione retta del pianeta 3. 6. 1. 4, 3
Declinazione boreale 0. 23. 40. 9, 1

Fatta come nell' altra opposizione l' estimazione delle osservazioni si avranno per l' istesso tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

{ Ascensione retta 3. 6. 1. 3, 9
{ Declinazione boreale 0. 23. 40. 7, 5
{ Longitudine 3. 5. 30. 36, 0
{ Latitudine boreale 0. 0. 18. 48, 9

25 *Decembre* 12.ore 4'. 57''. *t. m.*

Differenza osservata fra il pianeta ed *H* dei Gemini
In Ascensione retta . . . . + 0. 8. 8. 23, 7
In Declinazione . . . . + 0. 0. 24. 44, 5
Questa corretta dalla refrazione . . . . + 0. 0. 24. 44, 9
Ascensione retta del pianeta 3. 5. 52. 40, 5
Declinazione boreale 0. 23. 40. 21, 4

25 *Decembre* 12.^{ore} 4'. 57''. *t. m.*

Differenza offervata fra il pianeta ed η dei Gemini

Nell' Afcenfione retta . . . . +	0^s.	5^g.	25'.	32'',	1
Nella Declinazione . . . . +	0.	1.	7.	3,	9
Quefta corretta dalla refrazione . . . . +	0.	1.	7.	5,	1
Afcenfione retta del pianeta	3.	5.	52.	32,	7
Declinazione boreale	0.	23.	40.	24,	2

25 *Decembre* 12.^{ore} 4'. 57''. *t. m.*

Differenza offervata fra il pianeta e μ dei Gemini

Nell' Afcenfione retta . . . . +	0.	3.	24.	50,	7
Nella Declinazione . . . . +	0.	1.	3.	45,	1
Quefta corretta dalla refrazione . . . . +	0.	1.	3.	46,	2
Afcenfione retta del pianeta	3.	5.	52.	36,	2
Declinazione boreale	0.	23.	40.	23,	3

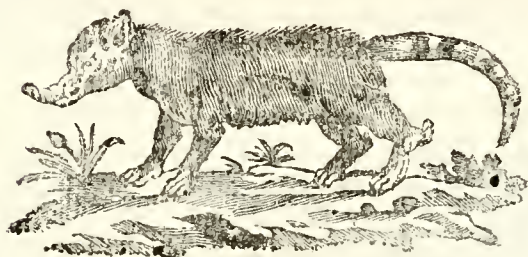
Secondo la folita eftimazione fi dedurranno per l' ifteffo tempo

I luoghi del pianeta.

Afcenfione retta	3.	5.	52.	36,	5
Declinazione boreale	0.	23.	40.	23,	0
Longitudine	3.	5.	22.	50,	6
Latitudine boreale	0.	0.	18.	45,	2

Il dì 25 per il tempo dell' offervazione fi trova dalle tavole del *Mayer* la longitudine del Sole 9^s. 4^g. 24'. 59'', 42. Prima dunque che feguiffe l' oppofizione doveva col moto relativo del pianeta dal Sole defcriverfi un arco di 57'. 51'', 18, il quale fecondo il moto diurno del Sole 1^g. 1'. 10'', 9 ed il moto diurno del pianeta 2'. 35'', 63 fi percorre in 21.^{ore} 46'. 16'', onde l' oppofizione apparente del pianeta feguì il dì 26 Decembre a 9.^{ore} 51'. 13'' di tempo medio.

La longitudine del Sole fi ha per quel tempo dalle tavole 9^s. 5^g. 20'. 28'', 22, e perciò la longitudine apparente del pianeta 3^s. 5^g. 20'. 28'', 22. Per avere la longitudine

corretta eliocentrica si farà uso, come sopra, delle due equazioni, la prima di $-14''$, 27 per l' aberrazione del pianeta, la seconda di $+1''$, 04 per l' aberrazione del Sole, dalle quali si deduce la suddetta longitudine $3^s. 5^g. 20'. 14''$, 99, a cui aggiungendo $7''$, 47, si ha la longitudine nell' orbita $3^s. 5^g. 20'. 22''$, 46 nel momento dell' opposizione, nel qual tempo la latitudine geocentrica era $0.^g 18'. 45''$, 7 boreale.

LETTERA SECONDA

RELATIVA A DIVERSI OGGETTI FOSSILI E MONTANI.

Del Sig. Ab. Lazaro Spallanzani Regio Professore di Storia Naturale nell' Università di Pavia.

Al Sig. Carlo Bonnet, Membro delle più illustri Accademie di Europa.

Scritta il giorno 12 Febbrajo 1784.

§. I.

Sostanze fossili osservate a Portovenere, e ne' suoi contorni. Fenomeno sorprendente osservato nella Riviera di Ponente.

QUanto l' interiore del picciol Borgo di Portovenere, e le rupi attornianti il contiguo golfo dentro alle bocche, sono immuni dalle tempeste, altrettanto ne vanno soggette le parti giacenti al di fuora, battute furiosamente da' colpi di mare, quando imperversano i due formidabili venti, scilocco, e libeccio. Quest' ultimo segnatamente caccia i sollevati marosi con tanto impeto, e a tale altezza contro gli scogli che servono di parapetto e difesa a quell' antica terricciuola, che sembra allora che il mare minacci d' interamente inghiottirla. Dirovvi, Amico illustre e carissimo, d' essermi trovato presente ad una delle più terribili libecciate; e quantunque io mi vedessi in sicuro, pure non saprei rappresentarvi l' orrore, e il ribrezzo, che cagionò nell' agitato mio animo quel non più visto spettacolo. Ho voluto con esatte misure prendere la maggiore altezza, a che sollevansi i fiotti nelle più fiere burrasche, e quando io ve ne parlerò, argomentar voi potrete quanto fuori delle bocche

del golfo si renda formidabile il mare. In grazia dunque della prepotente sua forza le alte rupi sassose sovrastanti a Portovenere dalla parte del mezzodì vengono lentamente corrose e distrutte, e a un simil guasto soggiaccion pur le tre isole prossime, *Tiro*, *picciol Tiro*, e *Palmaria*, ma distintamente quest' ultima, la quale quanto è agiata e soave a salire dalla parte del golfo, ed è tutta coronata di alberi, e piante fruttifere, altrettanto dall' altra che guarda il mare è deserta, e inaccessibile, e per ogni dove ripiena di precipizj, di ruine, di orrori. E a somiglianti disastri ho pur veduto andar soggette tutte quelle pendici, che nel restante della Riviera di Ponente, e nell' altra pur di Levante serrano il mare, come buona parte altresì di quell' altre, che inoltransi alle coste della Provenza. E a mio avviso non ha dubbio alcuno, che da queste continue corrosioni guadagnato su la terra in tutti questi luoghi non abbia il mare; e parlando della Palmaria che è la più grande e la più eminente di queste tre isole, mi lunsingherei di aver dati bastanti, per ragionevolmente inferire che quel lungo e facile pendío, che presentemente ha dentro del golfo, lo avesse anche una volta al di fuora, ma che col lento volger dei secoli sia stato ruinato e distrutto dai violenti colpi di mare. Medesimamente dai riflessivi esami da me fatti su la struttura di queste tre isole crederei di poter far vedere che a' tempi antichissimi non eran già tre isole distinte, siccome sono presentemente, ma sì bene una sola, o a dir meglio una penisola continovata con Portovenere.

Ella è cosa presso i Naturalisti notissima che per ammottamenti di terre, per tremuoti, o per la foga di precipitosi torrenti scoscendono talvolta fino alle fondamenta certi fianchi di monti, per cui svelate rimangono le occulte lor viscere, venendo in tal guisa ad aversi quella specie di notomia dentro alla terra, che indarno si sarebbe sperata dagli uomini. Tanto il continuo battere dell' onde marine ha prodotto negli altissimi scogli delle due Riviere di Genova, ma sopra tutto nell' isola Palmaria ai due fianchi, che guardano Mezzogiorno, e Levante. Quivi è dove un Fisico indagatore adagiatosi in qualche navicello sul mare quando non è agitato da' venti, e tenendo gli occhi fisamente rivolti a que-

sti due lati, può soddisfar con piacere gli avidi suoi desiderj. Io al certo ne' diversi miei viaggi terrestri non saprei dire in genere di *stratificazioni* di avere mai veduto oggetto più variato, nè più istruttivo di questo. L' andamento adunque degli strati componenti le grandissime rupi che terminano i suddetti due lati della Palmaria, in ogni parte pressochè verticali, la diversa grossezza di questi strati, la loro figura, la superficie, il mutuo intreccio, la varia direzione con l' orizzonte, son tutte cose ch' io mi riserbo a descrivere nella mia Opera. Quivi farò anche parola di varie buche, ed ample caverne, nel vivo sasso prodotte dall' empito dei marosi, atte esse pure a fornirci utili cognizioni, mirandole ben bene con l' occhio, e ponderandole con la mente. Presentemente parlerovvi soltanto della natura di questi strati, e dirovvi non averne trovato pur uno che calcare non sia. Che anzi tutta l' isola suddetta, che ha il giro di tre miglia all' incirca, non è che un masso di somigliante materia, vestito soltanto dalla parte che mira il golfo di una crosta terrosa, della grossezza di pochi piedi, ed essa pure in buona parte calcare, dentro cui vivono, e moltiplicano molti vegetabili di varia specie, e grandezza. Solamente questo gran masso non può dirsi formato d' un pezzo solo, ma d' un incredibile numero di suoli lapidei, o tavolati o strati che dir li vogliamo, combaciantisi strettamente insieme, senza che mai o quasi mai intramettano strato alcuno di rena o o di terra. E ciò ch' io dico della calce, e della stratificazione, onde risulta la Palmaria, ha luogo nè più nè meno per l' altre due isole, anzi per gli scogli che circondano il golfo, e per la più parte di quelli che sono littorali alle due Riviere. Soltanto a poca distanza da questo verso Ponente sollevasi un' alta rupe alle sponde del mare, composta di scissile pietra margacea, nella quale domina l' argilla, e che è commendabile per due singolarità, l' una di avere alla superficie bellissime macchie dendritiche, l' altra di rinchiudere delle marcasite tessulari.

Il marmo di Portovenere è uno di quelli che è nominato con lode in Italia, ed anche fuori. E ciò meritamente non tanto pel nobile lustro che dal pulimento riceve, quanto per le vaghe dorate macchie, che spiccano mirabilmente su d' un

fondo morato. Cotal marmo si cava presentemente in due luoghi, all' esterno canto della Palmaria a Levante, e in terra ferma poco lungi dal golfo, e da un Munistero detto le *Grazie*. Ommettere non doveva d' instituire i dovuti esami intorno a queste due cave, nè lascierò a suo tempo di porli sotto l' occhio del pubblico. Del rimanente non sono questi i due siti unici, dove si può estrarre un tal marmo. Moltissimi altri luoghi di quest' isola ne abbondano. Lo stesso è pure di più parti del vicino continente, e il medesimo Borgo di Portovenere, piantato tutto sul nudo scoglio, può dire di averlo dentro al suo seno. Di fatti molti strati dello scoglio non sono che di un tal marmo, con questo solo divario che è privo di quelle macchie giallo-dorate, o che non è tanto ricco di esse. Generalmente poi il marmo denominato di Portovenere non è come tanti altri marmi che formano monti interi o pezzi di monte, senza che mescolati vadano a materie straniere. Quello, di cui parlo, trovasi per lo più in compagnia d' una rozza pietra calcare, più dura di lui, e d' un cenerognolo scuro, per liberarlo dalla quale, e così poterlo aver puro, fa sovente d' uopo di molta spesa.

Alcuni screpoli, e spaccature degli scogli calcari fin qui menzionati, gli ho trovati riempiuti d' uno spato stalattitico, parte amorso, e parte cristallizzato, ignoto affatto a que' popolani, e che per la lucentezza che nel pulirlo riceve, per la nobiltà dei colori, e per la solidità e union delle parti, si rende prezioso per varj lavori, come per mezzo d' un valente Artefice l' ho io potuto chiaramente vedere. E questa qualità di pietra parassitica suole prodursi in que' luoghi, dove si depositano o scorrono l' acque piovane, pregne di particelle calcari corrose da' mentovati scogli, le quali particelle sciolte quivi appunto dalle suddette acque, danno origine a quello spato, alla generazione del quale è facile che concorra eziandio un principio acido vitriolico,

Era cosa da non trascurarsi il cercare se quella parte di scogli che sta sotto al mare è di natura diversa dall' altre che gli soprastanno, ed ho trovato che no, altro mai non essendo le parti inferiori all' acqua marina che una continuazione delle superiori. E questo pur si verifica nel caso che

lo

lo scoglio di verticale che era sopra del mare, piega al di sotto di esso e viene a farsi pressochè orizzontale.

Tutte le diligenze da me usate per vedere se quella catena di scogli, che circonda il golfo e che forma le tre isole, imprigiona qualche testaceo o crostaceo fossile, ovveramente qualche impronto di essi, riuscite sono infruttuose. Il rimanente altresì degli scogli littorali della medesima Riviera di Levante, che ho potuto visitare, mi ha offerta la medesima sterilità. Ma su di un tal genere di corpi fossili quanto mai da questa Riviera differisce l'altra di Ponente! Visitata avendola l'autunno del 1781, ho veduto non senza ammirazione, che cominciando alcune miglia al di sopra del Finale di Genova, camminando verso Ponente il restante di quella Riviera, anzi andando fino al Forte di Monaco, che è quanto dire scorrendo un tratto di paese di 70 e più miglia, tutte quelle montagne finitime al mare, anzi quelle medesime che alquanto s' inoltrano nel continente, contengono testacei. Sebbene che dissi contengono? Oltre ai testacei che quivi si conservano interi, se con lente si esamini la pietra componente que' monti, trovasi in tutto o quasi in tutto risultare da un minutissimo tritume o disfacimento di essi. E questa pietra *lumachella* per essere compatta anzi che no, serve in que' paesi per le fabbriche private e pubbliche, e si estrae da una montagna vicina al Finale, nella quale sono le cave. Ho esaminato queste cave che sono antichissime, e che si profondano nel seno del monte, e le riputerò meritevoli d' essere con qualche dettaglio descritte. Credereste? Tutto il Finale, formato di due lunghe borgate, tutti i villaggi circonvicini, una porzione della città di Genova per le osservazioni da me fatte, non sono in massima parte fabbricati che di questa pietra, che è quanto dire di testacei. E riflettete che ad onta dei tolti tanta è la immensità dei testacei che rimangono, che sembra essere stato levato da un gran monte un granello di arena. Ma voi facilmente farete curioso di sapere da me quali sono le specie di questi testacei fossili, e sicuramente la mia risposta vi sorprenderà, quando io vi dico, ridursi tutti a una specie sola. Egli è adunque un pettine di mediocre grandezza, e questo d' una qualità sola, che parte intiero, parte ridotto in minuzzoli compone tutta quell' e-

ſtenſion di montagne, ſenza che trovato io v' abbia mai frammiſchiato verun teſtaceo o croſtaceo, malgrado le più minute mie diligenze nell' eſaminar queſta pietra. Di queſta ſola ſpecie di pettine ſono adunque formate in maſſima parte le fabbriche del Finale, quelle de' paeſi circonvicini, e non poche di quelle di Genova. Ma come mai una ſpecie ſola di conchiglia, che è di origine marina, ſi è potuta unire in numero sì prodigioſo, sì immenſo, che appena ce lo poſſiamo figurar col penſiero? E più ancora creſcerà in voi lo ſtupore s' io vi dirò eſſere queſta ſatta di conchiglia viva del tutto ſconoſciuta a' peſcatori del mare Liguſtico, e di quel di Provenza. Laſcio alla voſtra gran mente il meditare ſu queſto aſtruſiſſimo fenomeno, che finora mi ſembra unico fra i tanti riferiti dai Naturaliſti intorno ai corpi *marino-montani*.

§. II.

Maraviglioſa Fontana d' acqua dolce che gorgoglia in mezzo all' acqua ſalſa del golfo. Ricerche intorno alla ſua origine.

Queſta fontana che è diſtante da terra 65 piedi, e dalla Spezia un miglio all' incirca, ſi ſolleva di alcuni pollici dal livello del mare, formando una ſpecie di colmo circolare del diametro di 20 piedi, il qual colmo è per ogni dove ripieno di gorgogli, eziandio quando il mare è quietiſſimo, e la ſua acqua ſi oſſerva ſempre torbidiccia, ma più ancora ne' tempi piovoſi, a differenza della circoſtante che è ſempre chiara. In grazia di queſti gorgogli non è poſſibile che una ſemplice barca o un navicello poſſa arreſtarſi nel centro del colmo, venendo ſubito cacciato alla circonferenza. Sentirete però l' artificio da me immaginato, e per cui mi è riuſcito di ſtar fermo a mio talento nel bel mezzo della fontana, giacchè troppo mi premeva di eſaminarla a dovere, così alla ſuperficie, che nel ſuo fondo. Adunque guſtata detta fonte alla ſuperficie non è niente dolce, ma ſolamente meno ſalſa che la circoſtante acqua marina. Scandagliata la ſua profondità, ella è di piedi $38\frac{1}{2}$, e il piombino giunto che ſia in vicinanza del fondo, ſi ſente tremare inſieme alla cordicella,

a cui resta appiccato, il qual tremore siccome non si manifesta in altri luoghi, così è chiaro che viene prodotto dall' acqua della fontana, che scaturendo dal soggetto suolo, lanciasi con impeto all' insù. Ma se l' acqua della fontana alla superficie era meno salsa, dove cioè non poteva non essere grandemente mischiata alla marina, questa era una presunzion troppo forte per credere che nel fondo esser dovesse interamente dolce. Ad accertarsi però di questo facea di mestiere trarre da quel fondo qualche porzione di acqua, e recarla fuori del mare, senza che si mescolasse punto all' acqua marina. Ma come giungere a conseguir ciò? Parlerovvi a suo tempo della macchinetta felicemente inventata, mercè cui ho potuto aver l' acqua fontana nello stato medesimo in cui è quando sgorga da quel fondo, e dirovvi adesso di averla trovata torbidissima, anzi fangosa, ma dolce. Vi aggiugnerò due altre circostanze, l' una si è che quest' acqua dolce in agguaglio a quella del mare è freddissima, il che nasce per venir di sotterra; l' altra che la macchinetta che era di latta, restò una volta, quando toccava il fondo, schiacciata in un lato, la qual cosa a mio avviso non potè accadere, che dal violento urto dell' acqua dolce sboccante dal fondo, che cacciò la macchinetta contro qualche pietra o pezzo di scoglio.

L' illustre mio Concittadino, Antonio *Vallisneri* nel venire da Genova nell' anno cinque di questo secolo visitò questo mirabil fonte, ma essendo egli di passaggio null' altro osservò se non se que' superficiali gorgogli, la cui acqua al suo gusto gli parve dolce; ma il vero è, come già dissi, e come ognuno che passa per quel luogo se ne può accertare, che per la salsezza sua non si allontana di molto da quella del mare. Fu anche condotto quel celebre Naturalista alla visita d' una caverna sotto d' un monte fra Reco, e la Spezia, dentro la quale que' coloni gli fecero credere che venivano ingojate tutte l' acque de' luoghi circonvicini, che a loro detta erano le generatrici della più volte mentovata fontana. Ma recatosi egli sul luogo, ben tosto si accorse dell' inganno, giacchè in quella caverna non

mettea foce che un rigagnolo poverissimo d' acque (a). Non so se l' amor proprio m' inganna, dicendovi ch' io crederei d' essere stato lo scopritore benavventuroso di un sì ammirando fenomeno. Certamente due grossi torrenti, situati a' fianchi d' un monte non più di tre miglia distante dalla Spezia, e per opposte direzioni unentisi in uno, e precipitanti le loro acque in un amplo baratro inaccessibile, riboccante mai sempre delle medesime, nelle vampe eziandio più cocenti del sollione, sembrano essi (per le ragioni che allegherò altrove) somministrane l' incessante alimento a quella rigogliosa capacissima polla, che attraverso del mare s' inalza.

Poche miglia distanti da questo baratro nel territorio di Casale si trovano alcune miniere di magnesia, che per lo spaccio che se ne fa a Livorno, e a Venezia, sono di qualche utilità a' proprietarj, ma che loro esser potrebbero incomparabilmente più proficue se avessero un po' più d'arte nel saperle cavare. E questa pietra che si trae pure da altri luoghi adjacenti, da me esaminata ne' siti nativi, e di cui non lascierò di ragionare, si può dire che sia l' unico minerale finora conosciuto in que' paesi.

§. III.

Grotta sopra Carrara; altra in vicinanza di Equi, osservate.

Uscendo dalla bocca più grande del golfo, posta tra la Palmaria, e le radici delle Panie, ed andando terra terra si presenta a sinistra dopo il cammino di 12 miglia un inclinato spazioso piano terminante col mare, ricco in ogni parte di piante fruttifere, e dove una volta si ergeva la celebre Luni, della quale antichissima città si può dire come di tante altre distrutte che *seges est, ubi Troja fuit*, non restando di lei che i ruinosi avanzi d' un ignobile Anfiteatro. A riserva di questo monumento d' antichità, che con piacere è stato da me diligentemente esaminato, e di cui non crederò

(a) *Vallisner*. Oper. in fog. T. III.

affatto alieno al mio inftituto il dar qualche conto, per tutto quel piano, andando anche fino a Carrara, non ho trovato cofa che allettar poteffe l' Offervatore. Solamente mezzo miglio al difopra di quefta fiorente città prima di arrivare alle cave de' marmi verfo la metà d' una pendice faffofa fi prefenta l' angufto foro d' una nera caverna, che dopo l' averla io vifitata da cima a fondo con uomini avanti che portavano fiaccole accefe, la trovai sì ricca di bizzarrie, di maraviglie, di fenomeni iftruttivi, ch' io dir non faprei fe vi fia altro luogo fotterraneo tanto ferace per l' Orittologo d' intereffanti notizie. Voi fapete quanto è falita in fama la Grotta di Antiparo, defcritta prima d' ogni altro dal Sig. di *Noïntel*, ed in feguito più filofoficamente dal celebratiffimo *Tournefort*, refa anche da lui più famofa per le credute vegetazioni di marmi colà dentro fcoperte. Ma o io m' inganno a partito, o alla grotta di Levante è di molto preferibile la Carrarefe, che ha di lunghezza un miglio e un quarto fotterra, che fi dirama in più altre grotte fubalterne, che ora fi reftrigne in angufti viottoli, ora fi allarga in più ftanze, e grandiofe fale, che prefenta un' immenfità di belliffime pietre acquee d' ogni grandezza, d' ogni forma, d' ogni maniera, che nel vivo faffo a un' enorme profondità del monte manifefta il corfo, la varietà, la natura degli ftrati componenti, dentro cui fcorrono romoreggiando due torrenti, e che termina in un picciol lago d' acqua limpidiffima. Credo al certo ch' io non farovvi cofa difcara quando vi metterò fott' occhio particolarizzati tutti quefti fenomeni. Nè io allora vo' tacervi i pericoli che incontrai nel vifitare quefta memorabil caverna, per fuperare i quali dovetti più d' una volta appendermi a funi, e così appefo paffar fopra profondi abiffi, ed orribili precipizj; e per quefto appunto io non trovai che pochi uomini arditi, ed affuefatti ad affrontare i pericoli dentro le cave de' marmi, che voleffero effermi a compagni in quefto mio fotterraneo viaggio.

Il prelodato *Vallisneri* nell' elaboratiffimo fuo Trattato *delle fontane* parla di due ammirabili caverne, che per effere non molto diftanti dal Carrarefe m' invogliai di offervare, anche per vedere fe da quel tempo a quefta parte, che è quanto dire dopo 78 anni, foggiaciute erano a qualche confidera-

bile cangiamento. La prima vien detta la *Buca d' Equi*, situata nel territorio di Fivizzano lontana 9 miglia circa da Carrara. La seconda si appella la *Grotta che urla*, poco sopra Forno Volastro. Della prima cade ora il destro di ragionare, della seconda parlerò più opportunamente in altro luogo di questa lettera. Dopo adunque l' aver fatte le necessarie osservazioni dentro alla mentovata grotta di Carrara, mi portai a visitare quella d' Equi, che è un picciolissimo villaggio sepolto come in un baratro fra orride montagne, e salutato appena per due ore nell' invernale stagione dal sole. Sebbene recatomi sul fatto, ed esaminatolo con attenzione, tosto m' avvidi che tanto esso discorda da quello che ce ne dice il Naturalista di Reggio, ch' io crederei di far torto ad un uomo sì diligente, sì oculato, sì sagace, s' io supponessi che quella grotta osservata egli l' avesse co' proprj occhi; che piuttosto mi farò a pensare che attenuto siasi alle relazioni di qualche inesperto. Lasciata però al presente la descrizione della medesima io qui altro non farò che toccare le irriflessioni, e gli sbagli che si leggono nel libro del *Vallisneri*. Egli ci dice in primo luogo che detta grotta è distante da Equi mezzo miglio, quando ne è lontana al più cento piedi. Nè vi è pericolo di equivoco, in quanto che vi sia forse colà più d' una grotta, mentre oltre al non esservene che una sola, e al portare anche adesso il medesimo nome, con cui fu chiamata dal *Vallisneri*, questo Fisico nel fissar la montagna dentro cui s' interna, e nel descriverne la bocca o l' ingresso, viene con troppa evidenza ad individuarla per quella stessa che mirasi anche al dì d' oggi. In secondo luogo l' interna forma, e configurazione io l' ho trovata in buona parte diversa da quella che viene da lui rappresentata. Terzo ei ci dice che da una crepatura interna di quello speco esce un fonte d'acqua perenne, da cui riceve il primo alimento il fiume Lucido; quando tal crepatura, che ci esiste anche adesso, non manda fuori acqua che dopo parecchi giorni di pioggia, e quella mattina ch' io la visitai, era asciuttissima, non ostante che piovuto fosse tutta la notte. Detto fiume poi ho io veduto che tragge la sua origine da tutt' altro luogo. Finalmente egli è falso che in certi tempi nuvolosi, e sirocali esca dalla bocca della caverna un profluvio d' acque, come

ci fa ſapere il chiariſſimo Autore. Di queſt' ultimo fatto, come altresì che l' acqua non eſca da quella capace crepatura ſe non ſe dopo lunghe non interrotte pioggie, ſono ſtato aſſicurato da più perſone di Equi, da me interrogate, e degniſſime di fede, alcune delle quali decrepite d' età, ma di mente freſca, mi hanno atteſtato che a loro memoria, e a quella ancora de' loro avoli l' interior forma della grotta è ſempre reſtata la ſteſſa; e però non ſi può ſoſpettare che dopo la relazione di quel Fiſico ſia nato da queſta parte cangiamento eſſenziale.

§. IV.

Oſſervazioni inſtituite alle cave dei marmi di Carrara, e ſu le Panie.

Non avrò difficoltà alcuna di farmi a parlare di queſte rinomatiſſime cave, non oſtante che ne' ſuoi *viaggi della Toſcana* v' abbia impiegato un intero capo il chiariſſimo Sig. *Targioni*. Se queſto Naturaliſta le aveſſe eſaminate egli ſteſſo, avrei forſe creduto opera perduta l' entrare io in queſta indagine. Ma chiunque leggerà quel capo ſi avvedrà che non s' avvolge che d' erudizione, e di quanto ſu queſti marmi era ſtato detto da *Strabone*, da *Livio*, da *Dante*, e da altri antichi Scrittori. Oltracciò non mi è noto che neppure altri Fiſici ſi ſieno eſpreſſamente portati ſul luogo per eſaminare le ſuddette cave. Ho adunque creduto eſſere opportuno l' entrare io in queſta diſamina; e però ſu quelle aſpriſſime montagne vi ho impiegato due ſettimane, non d' altro quaſi mai occupato che nell' oſſervare non tanto que' luoghi dove attualmente ſi cavano marmi, quanto quegli altri moltiſſimi, in cui ſi cavavano una volta, e che ora ſono ſtati abbandonati; e ciò per avere io più termini di confronto, onde giungere a conoſcer meglio l' impaſto, diciam così, e la ſtruttura di quella grand' Alpe. Mi riſerbo pertanto nella mia Opera a ragionarvi di ciò che di più importante è ſtato da me notato nelle ſuddette cave; e qui non farò che accennarvi alcuni fatti, e ſingolarità, non immeritevoli, per quanto io giudico, de' ſaviſſimi voſtri rifleſſi.

Se si considera quell' amplo tratto di Panie, che comincia poco sopra Carrara, e che in dirittura si estende fino all' altissima loro sommità (che è appunto quel gran seno, di dove si traggono i marmi) si trova tutto calcare, e tutto d' un masso solo, non avendo strati terrosi frapposti, ed essendo anche quasi per tutto ignuda la sua superficie. Solamente la pietra calcare formante quell' immenso scoglio è d' indole apparentemente diversa, in quanto che in molta parte è di grana grossolana, e d' un colore sudicio che nel cenerino rosseggia; e questa parte è poco atta agli usi della Società, quando l' altra per l' opposito è di grana più o meno fina, riceve pulimento, e lucentezza, ed è anche commendabile pel colore: e di questa ultima pietra risultano i diversi marmi Carraresi, i cui principali sono lo *statuario*, il *bianco ordinario*, e il *bardiglio*, che ha colore più o meno turchino, quantunque poi ciascheduno di questi tre marmi comprenda sotto sè moltissime varietà. Questi marmi diversi sono tante volte con distinzione separati l' uno dall' altro, quantunque fra loro contigui, così che lo statuario, per somiglianza d' esempio, non va a confondersi col bianco ordinario, non ostante che lo strato che compone il primo sia in immediato contatto con lo strato che forma il secondo. Ma altre volte, e queste non rare, lo statuario, e il bianco ordinario compongono uno strato unico, e solamente il primo a poco a poco e per gradi insensibili degenera nel secondo. Così voi dite del bardiglio comparato a questi due marmi; e per addurvi un esempio notissimo, si osservano bene spesso ne' marmi Carraresi presso a poco quelle mescolanze fra loro, che noi veggiamo ne' colori del prisma. Per questa ragione, e per altre che allegherò altrove, io sono d' avviso che i nominati tre marmi non formino realmente che una qualità sola di marmo, dividentesi poi in più varietà. La pietra di grana grossolana soprammentovata (che chiamerò *gregaria*) inceppa sempre, e soventemente anche avvolge, e seppellisce i marmi. Quindi è che per giungere alla verace vena del marmo fa di mestiere il più delle volte con mine far balzare in aria uno strato di molti piedi di pietra gregaria. Per altro dalle osservazioni da me fatte crederei d' essere fondato

to a credere che il nocciolo di quel gran tratto di Panie ſia tutto o quaſi tutto marmoreo.

Opinano diverſi Autori che i marmi ſi riproducono, e che alcune cave di Carrara, eſauſte a'tempi antichiſſimi, ſi ſono in ſeguito di nuovi marmi riempiute. Appoggiano ſingolarmente queſta loro opinione all'eſſerſi trovati come imprigionati in alcuni marmi Carrareſi degli ſcarpelli, de' picconi, de' martelli, ed altrettali iſtrumenti, onde ſi ſervivano i Romani per queſte cave (*a*).

Non contento di avere interrogato que' cavatori, e più perſone di Carrara verſate in queſte materie, che concordemente atteſtato mi hanno di non avere mai ſentito parlare della ſcoperta di tali iſtrumenti, nè di avere mai veduto marmi colà riprodotti, ho voluto recarmi in perſona alla viſita di tutte quelle cave, che da un tempo più o men lungo ſono ſtate abbandonate. Si trovano queſte abbondantemente in diverſi luoghi della montagna, ſegnatamente ſotto alcuni prominenti ciglioni, ed è facile il diſtinguere quelle che ſono antichiſſime, e che ſi lavoravano al tempo de' Romani, dall' altre di minore età, e da quelle eziandio che ſono ſtate laſciate da pochi ſecoli in qua. Ma a dir vero que' ſeni, quelle cavità, quei guaſti che ſi fecero allora nell' interno del monte, e che ci nacquero in grazia de' cavati marmi, vi ſi trovano anche al preſente, ſenza che ivi appaja pure indizio, pur ſegno di marmo riprodotto. In alcuni di queſti ſeni, di queſti vuoti eſiſtono antichi rimaſugli di ſtatuario, di bardiglio, di bianco ordinario, inſieme ammonticellati e confuſi; ho fatto ſmuovere diverſi di tai rimaſugli, e preſi tra mano, e attentamente conſiderati, non gli ho veduti punto avvolti da materia marmorea rigenerata, ma quelle rotture, que' piani, quegli angoli che ricevettero una volta da' martelli de' cavatori vi ſi trovano pure gli ſteſſi preſentemente. E però in forza di queſte mie oſſervazioni io non poſſo accordare la riproduzione de' marmi Carrareſi. Diſſi *Carrareſi*, non negando io che ſi poſſano formare altrove,

(*a*) *Bagliv. Vallisn. Waller.*

e che di fatti si formino nuovi marmi, a quel modo che si forman di nuovo altre pietre. In più d' una cava abbandonata mi si è offerto un fenomeno, che potrebbe forse spiegare come dentro alla pietra si sono trovati degli strumenti destinati ai lavori de' marmi, in supposizione che il fatto sussistesse. Diverse adunque di queste cave in que' siti dove entrano l' acque piovane, sono intonacate da una dura crosta lapidea, più o meno grossa, rotta la quale, si trova che tante volte rinchiude corpi forestieri, come schegge di marmo, o pietre d' altra qualità. Quando adunque cominciò a formarsi quella crosta petrosa, se in luogo di tai corpi vi si fossero abbattuti i mentovati strumenti, non v' ha dubbio che questi nel modo stesso stati sarebbero quivi entro imprigionati. Ma basta l' avere occhi per accorgersi subito, che quella prodotta sostanza crostosa è tutt' altro che marmo, essendo essa interamente stalattitica.

Malgrado le molte e diligenti indagazioni da me instituite, non ho mai potuto scorgere verun segnale di corpi marini, tanto ne' marmi Carraresi, quanto nella pietra gregaria involgente. Ne' primi però vi ho trovati due altri corpi stranieri, che debbono interessare di molto il naturalista *Litologo*. Il primo si è una pirite cristallizzata, o sia marcasita, che rompendo il marmo statuario vi si trova dentro. Non alligna però in tutte le cave d' un tal marmo. Che anzi si può dire non esservene che una sola che ne contenga, distante tre miglia da Carrara in luogo chiamato la *Rugeta*. Questa marcasita, che è un solfo mineralizzato col ferro, che è d' un giallo aperto, e che percossa con l' acciajo, manda copiose e strepitanti scintille, rade volte è tessulare, o sia a sei faccie, ma d' ordinario ha dodici o quattordici faccie, ed anche di più. I pezzetti più grandi sono di linee $3\frac{1}{4}$, e i più piccioli addimandano la lente per esser veduti. Tra i più grandi poi, e più piccioli v' ha una serie pressochè infinita di grandezze diverse. Ed ogni pezzetto, picciolo o grande ch' e' sia, si scorge sempre più o meno incastrato nel marmo, e talmente da esso stretto e serrato, che volendolo trar fuora, tante volte si rompe. Questa marcasita non esiste mai nelle parti solide del marmo, ma bensì dov' egli ha qualche pelo. Se adunque scoperto uno di questi peli o capillari aper-

ture, si pianterà in esso lo scarpello, e si farà forza, il marmo si dividerà in due, e le due faccie che apparisscono si veggono più o meno ricche di questi lucenti cristalletti piritosi. Osservate poi con qualche attenzione le faccie, vi si scoprono in più luoghi delle picciole fossette, o a dir meglio delle impronte angolari, che erano come le custodie dei cristalletti, i quali si sono staccati da una faccia, e rimasti sono attaccati all' altra, per essere in questa più profondamente impiantati. E che veramente le suddette impronte dessero ricovero a que' cristalletti piritosi, apparisce ad evidenza unendo insieme le separate faccie, giacchè essi allora vi si vanno di bel nuovo a piantar dentro. La conseguenza di questi fatti voi vedete ch' ella è manifestissima, cioè a dire che la pirite cristallizzata preesisteva al marmo formato, e che questo marmo dapprincipio era fluido, o almeno una tenerissima pasta.

Per quanto sono stato assicurato da' Posseditori di quella cava, non sono più di 20 anni, che ivi si è cominciato a scoprire questa pirite. E siccome è bellissima, ed è pur tale il marmo a cui va unita, così con tal marmo ho fatto lavorare alcune scatole che non possono esser più nobili,

Oltre all' indicata cava dello statuario, anche il bardiglio contiene un simile minerale, ma estremamente rari sono i pezzi di questo marmo, in cui si ritrova.

L' altro genere di corpi forestieri, che si osserva dentro a' marmi Carraresi, sono i cristalli di rocca. Voi sapete che quando sono aderenti alla loro matrice, questa ordinariamente è silicea, oppure quarzosa; e però si chiamano anche cristalli quarzosi, e rarissime volte si trovano radicati su base calcare. Per esser dunque di questa ultima natura la base de' cristalli, di cui entro adesso a parlare, si rendono essi presso i Naturalisti molto stimabili. Ma hanno altre qualità che grandemente ne accrescono il valore. Di una immensità di cristalli di rocca di fatte diverse, che si trovano in questo pubblico Cesareo Museo, venuti di Germania, dall' Ungheria, dalla Svizzera, e da altre parti, quantunque in sè pregevoli, perchè la più parte trascelti, tuttavia non ve n' è uno che a questi cristalli di Carrara comparare si possa. Crederò adunque prezzo dell' opera il farne nel mio Libro una

dettagliata descrizione. Ma accade a questi cristalli quel che si è veduto accadere alla pirite, voglio dire che il solo marmo ordinario bianco li rinchiude, anzi una sola cava di questo, chiamata la *Fossa dell' Angelo*, distante due miglia e mezzo da Carrara. Ed è puro accidente il trovarne qualcuno in altre cave. Questi cristalli non si veggono mai alla superficie del marmo, ma sempre nel suo interno, costantemente però in certi determinati siti, e non in altri. Adunque le parti interiori che sono solide non ricettano mai i cristalli di rocca, ma quelle sì bene che sono vuote. Dove adunque esistono delle cavità, quivi è che si scoprono gl' ingemmamenti cristallini, con questa impreteribil legge, che ogni pezzo o guglia di cristallo è sempre piantata con una estremità su la superficie della cavità, nè se ne trova mai una che staccata e libera sia. Di questi fatti non solamente sono stato assicurato da quelli che lavorano in questa cava, ma dagli occhi miei stessi, quando espressamente ho fatto spezzare molti e molti grossi pezzi di questo marmo. Ho ben veduto esser vana la credenza di que' cavatori che vogliono che questi cristalli di rocca sieno teneri finchè stanno sepolti nel marmo, e che allora indurano, quando rotto il marmo restano esposti alle impressioni dell' aria. Imperocchè quella durezza che hanno dopo, l' avevano egualmente nel momento che sono rimasti schiusi, e questo è troppo confórme alle leggi della cristallizzazione.

§. V.

Carrione, e Frigido esaminati.

Sono questi due grossi torrenti che scorrono il primo dentro Carrara, il secondo rasente Massa. Vien formato il Carrione da due torrenti subalterni, l' uno detto il canale di Torano, l'altro il canale di Bedizano. Siccome il canale di Torano serpeggia nel fondo di alcune gole, i cui lati abbondano di marmi Carraresi, così nel visitar questi mi si è aperta l' opportunità di osservar gli effetti che produce il sottocorrente canale, uno de' quali non voglio qui lasciare di riferirvi. Riguarda esso la rotondità che acquistano dalle sue

acque quelle ſchegge, e que' tritoli di marmo che dentro vi caggiono. Il chiariſſimo voſtro Sig. Nipote, quegli che pe' nobili ſuoi ritrovamenti è sì benemerito della Fiſica, e e della Storia Naturale, il Sig. di *Sauſſure*, nell' eccellente ſua opera de' *viaggi Alpini* fa vedere che la rotondità d' una moltitudine di pietre non è naturale ad eſſe, ma nata in grazia d' eſſere ſtate rotolate dall' acque dentro al letto de' torrenti, e de' fiumi; concioſſiachè dove queſti hanno l' origine prima, quivi le pietre ſono angoloſe, ma rotolate dall' impeto dell' acqua ne' luoghi più baſſi, cominciano a perder gli angoli, ed in progreſſo ſi fanno rotonde. Oltre l' avere io veduta tal verità in moltiſſimi luoghi delle ſpiagge del Mediterraneo, l' ho toccata con mano in que' pezzi di marmo, che o per la picciolezza, o per la cattiva qualità rigettati da' cavatori a cader vanno nel canal di Torano. Molti di queſti pezzi ſono dapprima di figura piatta, hanno i lembi angoloſi, e quivi ſono pieni di punte. Ma dopo l' avere viaggiato alquanto lungheſſo il letto del canale, quelle punte, e que' lembi cominciano a ſmuſſarſi, e perduto nel tempo ſteſſo a poco a poco quel piatto che avevano, acquiſtano i pezzi forma rotonda, così che non prima di venir traſportati dal torrente dentro la città, ſono già quaſi tutti divenuti globoſi.

Queſta oſſervazione mi ha ſervito di lume per un' altra. Dall' inceſſante cavar de' marmi per tanti ſecoli nel Carrareſe, ne è venuto che alcuni fianchi di monti per eſſer loro mancate le fondamenta ſono rovinoſamente precipitati, e quindi nate ne ſono delle altiſſime verticali rupi, come ſi oſſerva nel *Polvaccio*, che è una delle più grandioſe cave di belliſſimo marmo ſtatuario che vanti il paeſe. Ora è ſtato da me trovato, che dentro ad alcune di queſte sdrucite rupi, non d' altro compoſte che di marmi, e di pietra gregaria, vi ſono incaſtrate più file o ſerie di ciottoli, diverſi de' quali avendo io potuto eſtrarre di là, e conſeguentemente eſaminare, ho conoſciuto che ſono di natura marmorea, e ſomigliantiſſimi ai fluitati nel Carrione. Vi ſono adunque tutte le apparenze che in que' luoghi, che ſoſtentano adeſſo ſopra di sè intere montagne, ſcorreſſe una volta qualche fiume o torrente.

Il fenomeno delle pietre ritondate, che presenta il Carrione prima d' entrare in Carrara, viene offerto dal Frigido al di sotto di Massa. Quivi è adunque dove il suo letto è ripieno di ciottoli ritondi, altri gregarj, altri marmorei, entrati dentro di esso al di sopra della città, e aventi allora diverse irregolari figure non senza più angoli, e punte. Ma questo torrente in vicinanza del luogo delle pietre ritondate presenta una singolarità, che è quella di seppellirsi, e perdersi tutto dentro alla ghiaja, rimanendo al di sotto il suo letto interamente asciutto, e tornando poi a farsi vedere con le sue acque, quando è presso a metter foce nel mare. *Tinelli* si appella quel sito dove il Frigido si nasconde sotterra, o almeno dove si nascondeva, quando la prima volta lo visitai in ottobre, giacchè essendo stato da me visitato dappoi, si nascondeva allora più basso; e ciò nasceva dalla maggior copia di acque che conduceva per pioggie cadute. Che anzi se queste sono diuturne, e veementi, il suo corso continua scoperto fino al mare.

Ma se il Frigido in certi tempi si occulta, e si perde sotterra, in qualunque stagione dell' anno sbuca di sotterra. Adunque cinque miglia circa sopra Massa da una gola di monte scappa rigogliosо e spumante un grossissimo fonte perenne, che dà la prima origine al Frigido. A ragione chiamato viene con tal nome, poichè in estate messe la mani dentro all' acqua del fonte nel sito dove sgorga dalla terra, si sente freddissima. Immerso avendo io in essa il termometro reaumuriano, discese fino a' gradi $6 \frac{1}{4}$ sopra la congelazione, quando nell' atmosfera all' ombra era a gradi 20.

§. VI.

Osservazioni intorno all' origine delle fontane.

Pare che più non possa mettersi in dubbio che i fonti, e i fiumi derivano immediatamente dall' acque piovane, e dalle nevi squagliate. Alcuni dotti Francesi, ma in ispezieltà il celebratissimo mio concittadino *Vallisneri* ha dato tutto il peso a questa sentenza per le osservazioni da lui fatte su le montagne più alte degli Appennini di Reggio. Più anni addietro

in un mio viaggio montano intrapreso in altra parte degli stessi Appennini ebbi la compiacenza di confermare la stessa verità, come apparisce da due mie Lettere relative a questo argomento impresse nella Raccolta Calogeriana. Dirovvi di più che per Superior commissione essendomi io recato nel 1772 su le montagne di Como per far ricerche di naturali prodotti ad uso di questo pubblico Reale Museo, non cessai di far novelle osservazioni intorno all'origine di quelle moltissime fontane, che unitesi in rivi e in torrenti vanno a scaricarsi in quel lago. Sopra tutto saper volli dove esse ricevevano il primiero alimento, e trovai che questo veniva loro per lo più somministrato, o da acque impaludate dentro ad affossamenti, a vasche, ed a buche, o da vive nevi, e da ghiacci, che ne' profondi burroni, e in più sommità di quelle alpestri montagne si conservano in parte, nei calori eziandio della più infocata stagione. Analoghe osservazioni nel 1781 sono state da me instituite su diverse montagne del Piemonte, della Savoja, e della Svizzera. E tanto le prime che le seconde crederò bene di far pubbliche a maggiore confermazione del vero. La mia imparzialità m' obbliga però a confessare di aver trovato più fonti in que' siti dove non sono ricettacoli, e vivaj di nevi o di acque, e di averle vedute fluire ne' tempi eziandio, che in que' luoghi, e negli altri circonvicini regnava la maggior siccità. Tale si è una fonte perenne all' isola Palmaria, molte fonti al di sotto della Bocchetta per venir da Genova a Pavia, una grossa polla pochi passi distante da Equi, e due altre pure larghissime, l'una che in parte forma il canal di Torano, l'altra che dà origine al Frigido. A spiegare che queste sorgenti tutte ricevono la materia dal cielo, non vi sono a mio avviso, che due maniere, o supporre che da paesi rimoti sieno generate, dove frequenti cadon le pioggie, e che l'acqua per sotterranei canali sia tramandata a questi siti, di dove sbucan le fonti; oppure che in vicinanza di queste fonti vi sieno voragini sotterranee, baratri, e abissi, che inghiottiscan l' acque piovane, e le nevi quivi cadute, e liquefatte, e le conservino poi per alimentare tai fonti a qualunque stagione. Benchè la prima supposizione a me non sembri del tutto spregevole, pure io pendo assai più per la seconda, per

ciò almeno che risguarda le Panie, lusingandomi di avere molti fatti diretti per comprovarla.

§. VII.

Osservazioni fatte in quella parte di Panie, che sovrastà a Massa. Marmi di Serravezza.

Qui il piede della montagna non è calcare come presso Carrara. Usciti che siamo appena di Massa per avviarci alle Panie, ci si presenta una pietra quarzoso-micacea di color bruno, denominata *piastriccio*, perchè alla maniera degli schisti è divisibile tanto che basta in grosse piastre, di cui fanno qualche uso que' popolani, e tra gli altri servendosene a vestire le interne pareti delle fornaci a calcina, per essere tollerabilmente refrattaria al fuoco. E di questa pietra ho trovato costrutto l' antichissimo Anfiteatro di Luni (*a*). Ella dunque poco sopra Massa forma la base delle Panie, e s' inoltra all' insù disegualmente, poichè dalla parte del Forno non estendesi che a tre miglia, ma dalla parte della valle di Renara inoltrasi fino a cinque. In tutto questo tratto adunque non trovasi che questa pietra quarzoso-micacea interrotta in alcuni luoghi da strisce di bianco quarzo amorfo, la quale produce un' infinità di dirupi, di roccie, di precipizj, senza però lasciare in più siti di avere de' piani, e quivi d' esser vestita alla superficie d' uno strato più o meno grosso di terra; nel quale allignano varie piante, e segnatamente dei castagni, e dei noci. Dove termina questa pietra comincia la calcare gregaria, e si vede che la prima serve come di fondamento, e di base per la seconda. La calcare poi subito che ha cominciato a manifestarsi tale, seguita ad esserlo nel restante delle Panie, se non che di mezzo ad essa si scoprono in molti luoghi diversi filoni di marmo. Imperocchè quantunque Carrara venga tanto celebrata, e a tutta ragione, pe' vaghissimi suoi marmi, e distintamente pel bianchissimo

(*a*) §. III. di questa seconda Lettera.

bianchissimo e lucidissimo statuario, che ha arricchita Roma, o piuttosto il mondo intero di statue, e di trofei, non dee tuttavia essere per questa parte defraudata Massa delle sue lodi, vantando ella pure dopo lo statuario diverse qualità di bardiglio, e di bianco ordinario, ed oltracciò un genere nobilissimo di marmi chiamati *misti*, per esser dipinti a varj e leggiadri colori, del qual genere quasi del tutto è priva Carrara. Solamente hanno lo svantaggio cotesti marmi di non essere a lunghi e grossi filoni, e di trovarsi in siti ripidi a segno da non potere con quella facilità esser tradotti al mare, con cui si traducono i Carraresi. L'attenta considerazione dei diversi marmi di Massa mi ha fatta vedere quella stessa fisica verità che mostrata mi avevano que' di Carrara, e voglio dire che questa diversità non è che apparente, in quanto che consiste nella diversità del colore, della durezza, e di altre estrinseche circostanze, ma che intrinsecamente non sono marmi diversi, ma bensì il medesimo, o sia la stessa pietra calcare.

Nel Massese, e nel Carrarese non s'incontrano mai o quasi mai breccie marmoree. Si trovano però a poche miglia sopra Carrara, cioè a dire nelle cave di Serravezza. Una singolarmente bellissima ne ho io veduta colà vicina un miglio a Stazema, incavata nello scoglio d' un monte, i colori della quale sono il giallo, il bianco, ed il rosso. Ad ogni colore corrisponde una pietruzza diversa, e queste diverse pietruzze sono insieme attaccate per via d' una terra calcare. Per essere da molti anni, che si estrae quel marmo brecciato, si è fatto un profondo incavo nel monte, per cui chiaramente si vede che anche qui la pietra gregaria ravvolge, e serra la marmorea. Tutto il monte altresì, come gli altri vicini vengon composti di quella pietra, a riserva di qualche luogo umile, dove s' incontra la quarzoso-micacea.

§. VIII.

Osservazioni instituite su le cime delle Panie, e nell' Appennino fino alle sue radici dalla parte di Modena.

Esaminato il piede delle Panie, e le pendici di mezzana altezza, dove esistono i marmi, ragion voleva che salissi più oltre, e che superata la grand' erta mi recassi fino alle più eminenti cime per avere una compiuta idea di quella immensa montagna. Tanto io eseguii, e a meglio soddisfare me stesso volli superare in più luoghi quell' alpestre giogo; e in questo lungo disastrosissimo viaggio io posso dirvi che non bastando i piedi dovetti più volte raccomandarmi alle mani. Ma quanto le mie fatiche mi vennero vantaggiosamente ricompensate! Parlerovvi altrove dei lumi novelli che in un punto interessantissimo, quale si è la stratificazione delle montagne, mi fornirono quegli orrori, quelle solitudini, dove regna un eterno silenzio, interrotto soltanto dallo stridente grido dell' aquile, che nel principio della state nidificano su quelle orribili balze (*a*). Allora altresì ragionerovvi alquanto più a lungo di una doppia giocondissima scena, che inaspettatamente mi si offerse al metter piede su quelle cime, che fu quella di contemplare ad un tempo due stagioni diverse. La parte inferiore delle Panie, esposta a mezzodì, e che guarda il mare (era verso il terminare di Ottobre) si vedeva ancora adorna d' erbe vivaci, e gli alberi perduto ancor non avevano il loro verdore: per contrario ne erano quasi senza tutte le piante, che situate alla parte opposta mirano il nord. Dalla prima sentiva alitare un venticello dolce e soave, che mi ricreava; spirava dalla seconda un' aria fredda, che stringevami il cuore. A dir tutto in breve, là rimaneva un avanzo di estate, qua s' inoltrava un principio d' inverno. Conosco di non avere per gli oggetti che mi circondano la sensibilità di quel celebre vostro Compatriota, che ci ha dato un Libro *su le Montagne*, sette ottavi del

(*a*) E' la specie chiamata dal Linneo *Melanætus*.

quale sono per lo meno impiegati in maraviglie, in trasporti, in estasi, in giaculatorie, in rapimenti (*a*). Crederei tuttavia di avere un' anima che sente, la quale non posso esprimervi quanto restasse commossa all' improvviso spettacolo di queste due contrarianti scene. Qui però io non voglio trattenervi, che intorno ad alcune poche osservazioni generali. L' una si è che in quel gran corpo di montagne io non ho mai trovato *pori ignei*, come ceneri di vulcani, pomici, lave, vetro fossile; neppure basalti o graniti, ma tutto è un immenso ammasso di pietra calcare, la quale estende le sue radici dal mare fino alla parte opposta in vicinanza di Castelnovo di Garfagnana. Solamente mirasi in alcuni rari luoghi interrotta da picciole vene di ardesia argillacea, o da qualche strato brevissimo di pietra arenaria. Questo braccio adunque dell' Appennino è una montagna secondaria, ma la cui stratificazione poco si accorda, come vedrete, con quella che si suole osservare nelle montagne di questo genere. Di più dalla sua sommità fino alle due opposte radici ella è priva di spoglie marine, le quali spoglie se non constituiscono il carattere, formano però l' ordinario accompagnamento delle secondarie montagne.

Il chiarissimo mio Amico Sig. Giovanni *Arduino*, in due sue lettere odeporiche, impresse negli Opuscoli Calogeriani, piene di nuove osservazioni, e di giudiziosi riflessi, parlando incidentemente delle Panie, osserva che queste hanno la loro base in quella pietra scissile, che è stata da me chiamata *quarzoso-micacea* (§. VII.), e ch' egli appella *talco-quarzosa*, e che anzi ne sono in più luoghi composte fino alla metà circa della loro altezza.

Quanto al primo, già veduto avete essere stata da me notata la stessa cosa rispetto a Massa (*ivi*): ma bisogna dire che quel prode Naturalista non abbia fatta osservazione che a questo luogo, giacchè in altri, come ho avvertito, non apparisce segnale di una tal pietra. Riguardo poi al secondo, certamente la medesima si solleva sopra Massa a considerabile altezza;

(*a*) Lettres Physiques & Morales sur les Montagnes ecc.

questa però è picciolissima, volendo ragguagliarla alla sommità delle Panie. Siccome questa pietra viene a ragione da lui considerata come una delle primigenie, una di quelle che formano le montagne primarie, o primitive, come le chiamano, e su la quale posano tante volte le secondarie, così sono stato attento se mai ne' siti più bassi delle Panie, dove si presentano sfendimenti o rotture, venisse a farsi palese; ma ogni mia attenzione è riuscita infruttuosa.

Perduta la vista del mare, e delle sue vicinanze, e preso il cammino alla volta di Castelnovo di Garfagnana, drizzai i miei passi a Forno Volastro, terra per ogni dove circondata da montagne altissime, e che a guisa di quella d'Equi gode nel verno non più di due ore delle influenze immediate del sole. Le miniere del ferro che una volta quivi si cavavano, e la famosa sua grotta, visitata 78 anni fa, siccome vi dissi, dal *Vallisneri* (§. III.), procacciano un nome a questo miserabil villaggio. Delle prime resta soltanto qualche vestigio, essendo state da gran tempo abbandonate, o per la troppa scarsità del metallo, o per la difficoltà di estrarlo, o per la negligenza, ed anche poca perizia de' cavatori. La seconda conservasi anche adesso, quale in parte descritta ci viene dall'elegantissima penna del Reggiano Naturalista. Un lontano romoreggiare di acque che si sente alla bocca della caverna, una volta ellittica che conduce dentro di essa, alta appena per potere capirvi un uomo a dorso incurvato, un atrio meno angusto, e a molti passi allungato, sul piano del quale fluisce e si divalla un picciol rigagnolo, da ultimo una spaziosissima sala, adorna d' ogni intorno e rabescata di produzioni stalattitiche, e flagellata da un canto da una grossa vena di acque precipitanti dall' alto, e producenti alla bocca quel profondo strepito, sono ciò che formano l' essenziale di questo sotterraneo speco. Le novità poi che colà dentro son venute appresso la visita del *Vallisneri*, io le giudico una conseguenza di quel rivolo, che per abbondare di materia tartarosa, e per le deposizioni stalattitiche che vi ha fatto, e che vi va facendo, non può a meno di non aver prodotto, e di non produrre dei notabili cangiamenti, i precipui de' quali ho voluto notare, e descriverò quando oltre a questa farò parola della grotta Equi e della Carrarese,

come pure d' altre diverſe, che non vi ho accennate, e che reputo degne di ſtoria. Il reſtante poi del viaggio da Forno Volaſtro fino a Caſtelnovo di Garfagnana null' altro mi offerſe che una moltitudine di montagne ſubalterne, e continuamente minori, compoſte tutte o quaſi tutte della conſueta pietra calcare gregaria.

Veduto dalle radici del mare fino alle oppoſte queſto braccio dell' Appennino, volli eziandio vedere quelle parti di eſſo, che chiamano *Alpi di S. Pellegrino*, le quali hanno la baſe ſopra Caſtelnovo, che per l' altezza, e pel loro gran corpo non la cedono punto alle Panie, e che alla parte del nord terminano con le amene pianure del Modaneſe. Dirovvi candidamente ch' io figurato mi era di trovare anche qui la medeſima qualità di pietra, ma mi accorſi che in ciò queſti due tratti dell' Appennino differiſcono eſſenzialmente. Sappiate adunque che l' Alpi di S. Pellegrino dalla loro ſommità fino alle oppoſte radici, ſituate al nord, e al mezzodì, non ſono che un aggregato di pietra arenaria, contando io per nulla alcuni breviſſimi e ſottiliſſimi ſtrati di ardeſia argilloſa, che rade volte vi ſi trovano dentro. Che anzi la maſſima parte di que' montani villaggi, di quelle Chieſe, di quelle capanne non d' altro è fabbricata che di tal pietra. E ſiccome non difficilmente ſi sfalda, e ſi può anche tollerabilmente pulire, così di eſſa ſi ſervono que' montanari e per tegole alle caſe, e per colonnati, e per altrettali lavori. Ma ſe queſta pietra differiſce per natura da quella delle Panie, ne differiſce altresì pel modo con cui viene a formare quella numeroſa ſerie di monti. La pietra calcare delle Panie forma un gran tutto, ſenza avere frappoſti ſtrati di terra, che ſeparino pietre da pietre, e quindi le Panie altro non ſono, che un immenſo ed unico ſcoglio. Per l' oppoſito la pietra arenaria dell' Alpi di S. Pellegrino è a ſtrati, e a filoni ſeparati, di mezzo a' quali ſpuntano più lingue di terra; e da ciò naſce che queſt' Alpi, malgrado l' inclemenza, e la ſalvatichezza del luogo, ſono veſtite verſo la cima di campagne erboſe, di faggi, di abeti, di carpini; e nelle parti meno eminenti di caſtagni, di noci, e di altre ſimili piante fruttifere; quando le Panie, maſſimamente dove guardano il mare, non ricettano per due terzi della ſuperiore loro al-

tezza quasi niun vegetabile . Finalmente la pietra arenaria è ben lungi dall' avere quella stratificazione, che osservasi nella calcare . Ho fatto qualche esame sperimentale su le parti constitutive della pietra arenaria, e ne ho avuto i seguenti risultati. All' occhio nudo, ma più assai ajutato dalla lente si vede esser composta di granellini quarzosi di varia forma , e grandezza insieme strettamente legati da una terra argillosa indurita, che rompendo in pezzetti la pietra, si fa polverosa. A questi due componenti si aggiunge un terzo, che è la mica argentea, le cui squamette però relativamente alle granella quarzose sono in minor numero . Quindi egli è chiaro che questa pietra si dee collocare fra le composte , chiamate *saxa* dai Naturalisti. Attesa la natura di questi tre componenti non è punto a maravigliare, se questa pietra non soggiace al più picciol moto negli acidi, nè si scioglie punto da essi . S' intende altresì a motivo del quarzo di che abbonda , per che cagione battuta dall' acciajo manda scintille. Ad ogni colpo però ne salta via qualche pezzetto , e quindi apparisce che non è molto dura. Esaminata ne' luoghi nativi non sembra risentirsi molto alle ingiurie dell' aria: il suo colore pende al bigio, a riserva d' essere seminato di punti argentini, che sono le picciole squame della mica.

Il prelodato Sig. di *Saussure* ha osservato (l. c.) che la pietra arenaria trovasi quasi sempre tra le montagne primitive, e le secondarie. Come fisico esattissimo , e che non asserisce se non quello che vede , ha voluto modificare questa proposizion generale con la particella *quasi*; per cui dà a vedere che qualche rara volta la pietra arenaria non è dunque frapposta ai due menzionati generi di montagne . Io posso fornire a quel celebre mio Amico una prova novella di tal modificazione , sì nelle Panie guardanti Massa, sì nell' Alpi di S. Pellegrino. Nelle prime tra le montagne calcari secondarie , e la pietra quarzoso-micacea primaria , non apparisce certamente giammai l' arenaria , che anzi quelle , come già dissi, appoggiano immediatamente a questa . Le seconde poi da cima a fondo sono un composto di pietra arenaria , parlando anche delle più basse colline, come specificherò meglio altrove , senza che mai apparisca indizio d' altra qualità di pietra sottostante.

Nelle montagne arenarie di S. Pellegrino non ho mai trovato corpi ſtranieri. Crederei tuttavia di aver prove dirette, che ſono un lavoro dell'acque. Io lo deduco da certi globi pur arenarj, del diametro talvolta di molti piedi, che in più luoghi ho oſſervato incaſtrati nelle ſuddette montagne arenarie, ſegnatamente in alcune diroccate rupi, dentro cui ſtavano in parte ſeppelliti, ed in parte ſporgevano in fuora, alcuni de' quali globi eſſendo ſtati da me eſaminati, ho trovato che avevano marche le più manifeſte, le più convincenti d' eſſere ſtati una volta fluitati. Ma non è di queſto luogo il diſcendere ai dettagli di queſto raro fenomeno, e l' individuare i luoghi dove ſi oſſerva.

Per gli eſami da me fatti nelle Panie, e nell' Alpi di S. Pellegrino voi vedete adunque, dottiſſimo Amico, che la Natura nella formazione dell' une, e dell' altre ſi è ſervita di materiali diverſi. Là non ha impiegato che calce, qua in maſſima parte che arena. Per conto però di queſt' ultime, ſe dalla linea diritta che da Caſtelnovo di Garfagnana conduce a Saſſuolo (groſſo Borgo poche miglia diſtante da Modena) piegheremo o dalla parte del Bologneſe, o dall' altra del Reggiano, e del Parmigiano, troveremo che la Natura è ricorſa ad altre materie, non oſtante che queſti tratti ſieno una continuazione dell' Appennino. Così molte montagne ſopra Bologna, ſopra Reggio, e ſopra Parma abbondano di pietra calcare, non ſenza una quantità ſterminata di teſtacei, la più parte calcinati. Quella porzione di Appennino, per cui da Fornovo nel Parmigiano ſi va ſino a Pontremoli, e che fu da me eſaminata andando alla Spezia, è ella pure preſſochè tutta calcare. Se poi ſi traverſi lo ſteſſo Appennino, andando da Pavia a Genova, oltre la pietra calcare ſi trovano monti interi di pietra ſteatitica, e asbeſtina. Chi detto avrebbe che la famoſa Bocchetta foſſe in gran parte compoſta di asbeſto, ſiccome io, forſe il primo, ho avuto la contentezza di ſcoprire? Si vede adunque che la Natura nella formazione degli Appennini ſi è compiaciuta della varietà, come uſar ſuole in più altre operazioni dei tre Regni. Pare ſolamente che non abbia meſſi in opera i graniti, quel genere di pietre che per la dibattuta ſua origine, pe' luoghi dove ſi trova, per le conſeguenze che ſe ne deduco-

no, fa tanto romore preſſo i moderni Geologi. Poſſo almeno accertarvi di non averli mai trovati ne' viaggi da me intrapreſi in diverſi tempi ſu gli Appennini.

Ne' racconti fattivi intorno a queſte due Alpi vi ſarete facilmente aſpettato da me, ch' io vi ragionaſſi delle loro altezze paragonate al livello del mare. La voſtra aſpettazione era giuſta, e mi rincreſce di non avere potuto appagarla per mancanza di un buon barometro, la quale mi ha fatto commettere queſta involontaria ommiſſione. Non ſaprei ſe in qualche rimota e indiretta maniera poteſſi al di groſſo ſupplirvi, coll' accennarvi la temperatura che colaſsù regnava quando io mi ci trovava, confrontandola con quella delle circoſtanti ſoggette pianure. Dirovvi adunque che il giorno 12 di Ottobre il mio termometro alla ſommità delle Panie in luogo ombroſo, e dove non avea luogo la riflesſione del raggio ſolare, diſceſe ai gradi 13 $\frac{1}{3}$ ſopra la congelazione; ſull' Alpi poi di S. Pellegrino, dove regna maggior freddo per non ſentirſi quivi l' aria del mare, diſceſe nel ſeguente giorno ai gradi 8 $\frac{1}{4}$, quando un altro termometro ſimilmente graduato, e poſto all' ime radici delle Panie, marcò all' ombra in que' due giorni per atteſtazione d' un mio Amico, conoſcitore di queſte materie, e degno di fede, i gradi 21 all' incirca.

Stando fuor di Ginevra nella dolce voſtra ſolitudine di Genthod, voi vedete più montagne della Savoja coronate il capo d' eterne nevi. Le cime delle due Alpi, di cui ragiono, ne rimangono prive nella ſtate inoltrata. Non è però che anche allora in più luoghi ſcoſceſi e profondi non vi reſtino vecchie nevi tutti gli anni dalle nuove ritrovate e ſepolte. Finalmente un' altra non equivoca pruova dell' altezza grande di quelle alpeſtri regioni ſul piano del mare ella è, che le ſcarſe biade de' magri terrenelli ſottogiacenti al ſopracciglio dell' Appennino ſogliono maturare un meſe e mezzo più tardi dell' altre ſituate ne' colli Modaneſi, e Reggiani.

§. IX.

§. IX.

Osservazioni intorno all' insolita Nebbia della state prossima scorsa, apparita anche su gli Appennini; e ai Temporali insorti in quella occasione.

A compimento delle cose osservate nel mio viaggio montano lasciar non voglio di parlarvi di queste meteore, poichè quantunque estranie al soggetto, e alla mia professione, ciò non ostante per essermisi offerte non cercandole, anzi pensando a tutt' altro, io non doveva negligerle. Tutte e due antivennero la mia partenza verso il mare al di là d' un mese. Già prima della metà di Giugno l' aere di Lombardia si era fatto grandemente nebbioso, e la nebbia benchè non c' involasse l' occhio del sole, ce lo rendeva però offuscato d' assai, e di buon mattino, e verso la sera rubicondo, e come sanguigno. Spirava allora un picciol ponente, che si fece anche sentire ne' dì seguenti, ne' quali insorse in Pavia, e ne' suoi contorni più d' un temporale, che avea pur la direzione da ponente, accompagnato da pioggia, da tuoni, e da fulmini. Finiti che erano i temporali, seguitava come prima a farsi vedere la nebbia, ed il giorno 23 dello stesso mese essendo io partito per Reggio, e speso avendo in quel viaggio tre giorni in barca per la lunga del Po, osservai che in tutto quel tratto d' acqua, e ne' circostanti luoghi vi era egualmente fitta come nel Pavese.

Il celebre Sig. Professore *Toaldo* nell' interessante sua Memoria relativa a questo soggetto osserva l' estensione che ebbe da un mare all' altro il temporale del dì 26 di Giugno, e la prodigiosa quantità di saette che diede (*a*). In quel giorno a Gualtiere nel Reggiano in riva al Po il cielo fu soltanto nuvoloso, oltre l' essere di sotto ingombrato dalla solita nebbia foltissima. Ma nell' entrante notte infuriò colà un temporale che durò più ore. Si sciolse in semplice pioggia,

(*a*) Opusc. di Mil.

e questa non molto dirotta, ma che continuò fino al romper dell' alba. Non saprei dirvi di avere mai sentito tanti fulmini, quanti ne scoppiarono in quella notte. Paruto essendomi dapprincipio che l' uno succedesse all' altro in tempi eguali o quasi egùali, volli farne quella prova che trovandomi in letto, e nell' oscurità poteva esser l' unica, voglio dire di ricorrere alle battute del mio polso, e m' avvidi che non m' era ingannato. Contai sette fulmini, e tra l' uno e l' altro vi si frappose sempre quell' intervallo di tempo che non fu minore di 19 battute, nè maggiore di 22. Sembrava dunque che fosse una macchina, che per caricarsi d' elettricità atta a fulminare esigesse presso a poco un determinato spazio di tempo. Sebbene dopo lo scoppio di quei sette fulmini, gli altri moltissimi che si sentiron dappoi non si succedevano più in quella data proporzione di tempo. Il giorno seguente, cioè li 27 Giugno, proseguì il cielo a restar nuvoloso, senza che dopo quella pioggia notturna diradata si fosse nè punto nè poco la nebbia. Il restante di quel mese, e la prima settimana dell' entrante Luglio furono nel Reggiano, e nel Modanese egualmente caliginosi, nè andarono esenti da qualche temporale accompagnato da grandine. Dominò quasi sempre lo stesso ponente, più o meno rimesso, più o meno forte, e quando soffiava anche gagliardamente, la nebbia perseverava la stessa. Solamente in seguito cominciò a farsi meno densa, e allora rasserenatosi con qualche costanza il cielo, cessò affatto il ponente.

Questa nebbia che con l' estremità inferiore toccava la terra, e che sollevavasi ad altezza incommensurabile all' occhio, era asciutta in modo, che non bagnava punto gli abiti, nè le piante, nè gli altri corpi terrestri. Quindi apparisce che composta non era di vapori acquei, come le nebbie ordinarie, ma sì bene di esalazioni secche, la qual particolarità era già stata avvertita dal mentovato chiarissimo Professore di Padova. In effetto se stata fosse vaporosa, chi non vede che dopo un vento forte, dopo un rovescio di pioggia doveva svanire? Questo doppio fatto mi si presenta d' inverno soventemente in Pavia, alla quale città per la frequenza delle foltissime nebbie diuturne non saprei quale altra paragonare in Italia. Non si può dunque dire che la nebbia, di cui fa-

velliamo, concorresse alla formazione di que' nuvoli temporaleschi. Credo bene che co' suoi aliti, esuberanti probabilmente di fluido elettrico, concorresse alla generazione di quel numero innumerabile di fulmini. Tutti i temporali che in occasione di quella nebbia vennero dove io mi trovava, furono da me con attenzione osservati. Li trovai sempre più abbondanti di fuoco, dirò così, che di acqua, giacchè la pioggia d' ordinario era tenue, e le saette copiosissime: che anzi per due volte furono pur tali, senza che cadesse di cielo una stilla d' acqua. Espiando con occhi attenti la nuvola temporalesca, o prima che venisse sul nostro zenit, o dopo che ne era partita, mostrava chiaro non esser lei gravida di molta pioggia, conciossiachè laddove l' altre nuvole temporalesche apportatrici di qualche acquazzone sono d' una considerabile grossezza, e quindi formano quelle apparenti gran torri, quelle biancheggianti montagne, la nuvola accennata soleva essere piuttosto sottile. Un' altra differenza io osservai fra i temporali di quella nebbia, e gli altri. Parlando degli ultimi, spesso cominciano a formarsi a cielo sereno, ingrossano a poco a poco, ed allargatisi sul nostro orizzonte versano un nembo d' acqua, o di grandine, indi o recandosi altrove, o sciogliendosi ridonano al cielo la tolta serenità. Per contrario quando dominava quella nebbia un velo nuvoloso stendevasi sopra una immensità di paesi, produceva ora in un giorno ora in un altro de' più romorosi, e de' più spaventevoli temporali, e dopo che questi cessato avevano non lasciava quel velo di nugoli di coprire il cielo. Non tacerò un' altra singolarità relativa ai fulmini, e ai tuoni di quella stagione. I primi bene spesso non erano accompagnati da quel suono stridulo e allungato, oppur da quell' altro somigliante di molto ad uno o a più colpi di cannone, i quali due suoni sembrano formare l' estrinseco distintivo de' fulmini ordinarj, ma avevano infinitamente in grande la somiglianza del suono che produce una canna quando con entrambe le mani fendesi per lo lungo prestamente in due: oppur quell' altro che cagiona un violento colpo di bastone su d' una tavola. I' tuoni poi che per l' oscuro lor suono pareano altissimi, non erano molte volte continuati, ma interrotti da morule che li rendevano come stentati, e difficili a farsi sentire. Una simile cir-

costanza viene pure marcata dal più volte lodato Astronomo Padovano.

Fin qui ho ragionato, illustre mio Amico, della nebbia non vaporosa, e dei fenomeni che la accompagnarono nelle pianure Lombarde. Passo ora a farvi parola della medesima da me osservata ne' siti montuosi, quando dalla parte di Parma superai il giogo dell' Appennino per recarmi a Portovenere. Questo picciol viaggio venne da me fatto in un giorno, che fu il ventesimo terzo di Luglio. La nebbia in quella stagione era una metà circa meno densa di quello che stata era in Giugno. Di più il tempo allora era sereno, a riserva di alcuni temporali, che a quando a quando insorgevano da libeccio. In quel tratto di monti era egualmente diradata che alle loro falde, e radici. Quando fui molto inoltrato su di essi, io era sopra tutto attento, se nelle loro gole, e ne' più bassi lor fondi vi appariva nel modo stesso, e trovai che sì, di maniera che quel caliginoso che aveva l' aria su le più alte cime, lo aveva pure in que' cupi fondi. In più d' un luogo di quell' alte montagne si formavano sotto i miei occhi degli ammassamenti più o meno grandi di nebbia, ma che era di qualità vaporosa, entrando dentro alla quale io restava bagnato, quando l' altra era asciuttissima. Inoltre la prima era di gran lunga più spessa della seconda. Ma il fenomeno più bello e più grandioso che mi si offrì fu sul giogo altissimo di quell' Alpe. Un miglio e mezzo prima di giungervi mi trovai nascosto fra un ammasso di nuvole, che venivano da libeccio. Proseguendo il cammino all' insù dopo l' aver fatto un quarto di miglio, cominciai a sentire qualche colpo di tuono che mi parve vicinissimo. Andando più alto e sempre in mezzo alle nuvole mi soprapprese la pioggia con vento; e da' tuoni novelli che attorno a me romoreggiavano, e da' vivissimi lampi che qua e là vedeva guizzare, m' accorsi non senza ribrezzo d' essere attorniato dal temporale. Ciò nondimanco feci coraggio, ed avendomi assicurato la guida che mi conduceva, che pochi passi restavano a pervenire al sommo della montagna, dopo che scendendo al basso se non dalla procella, da quel bujo almen delle nuvole, che mi toglieva la vista, io mi sarei liberato, spronai il mio cavallo, e in poco d' ora giunsi di fatti alla sospirata cima,

chiamata *Cisa*, che è il luogo dove termina lo ſtato di Parma, e comincia quello della Toſcana. Quivi la pioggia era più rimeſſa, ma il vento più forte, e l'aer freddiſſimo. Quando fui avvolto nel temporale, ſiccome cominciai a ſentire del freddo, così tirai fuori il termometro, che era coſtrutto in maniera, che non ſofferiva punto dalla pioggia, per appoggiare ſu d' una laſtra d' argento, ed è quel deſſo che voi grazioſamente mi regalaſte a Ginevra, e che tra le molte altre coſe voſtre prezioſe e care io conſervo qual dolce pegno dell'amicizia verſo me voſtra. Colaſsù adunque diſceſe in pochi ſtanti fino ai gradi 7 $\frac{1}{4}$, quando alle radici della montagna marcava i gradi 25 ſopra lo zero. Seguendo la direzion della ſtrada io non potea fare due paſſi ſenza cominciare a diſcendere, e già era ſull'avviarmi all'ingiù, quando un inaſpettato fenomeno mi determinò a cangiare idea. Alzando gli occhi al di ſopra della ſtrada verſo mezzodì vidi un chiarore attraverſo la nuvola tempeſtoſa, il quale a me parve venire da' raggi ſolari che andaſſero a ferire la ſommità di una contigua più elevata montagna. Uſcendo fuor di cammino la Ciſa s' inalzava dolcemente verſo quel luogo dove veniva il chiarore, e però ſenza indugio mi determinai d' incamminarmi a quella volta. A mano a mano ch' io ſaliva colaſsù, diradavanſi i nuvoli che mi attorniavano, creſceva il chiarore, veniva meno la pioggia, ſcemava il freddo, e continuando ſempre più in alto il cammino, a poco andò che ſvelata mi apparve la bella faccia del ſole, trovandomi già tutto fuora del temporale, anzi vedendolo aggirarſi ſotto a' miei piedi. E' ben difficile che nel reſtante de' giorni miei io m'avvenga in altro naturale oggetto per me più ſorprendente di queſto, più dilettoſo, più grande. Standomi adunque ſu quella creſta di monte mi appariva il ſottopoſto temporale in ſembianza d' un immenſo lago nuotante nell' aria, irraggiato dal ſole, e tutto in tempeſta. Erano cioè gli ſtrati ſuperiori delle nubi temporaleſche, che inveſtiti dalla luce ſolare, e dal vento prendeano quel mentito vaghiſſimo aſpetto. Soffiando laggiù un forte libeccio, ſi vedevano correr le nubi all' oppoſta parte piene d' increſpamenti, di onde; ed oltre a quel moto di rapimento e comune ne avevano altri particolari, ed uno diſtintamente di rotazione, per cui s' in-

generavano in esse qua e là molti vortici, ed a vicenda si distruggevano, somiglianti a quelli che veggiamo in piccolo nell' acque correnti de' canali, de' fiumi. La cadente pioggia che andava a percuotere que' petrosi ciglioni, e quelle annose boscaglie, cagionava un confuso non interrotto fragore, che veniva a più doppj accresciuto, e dal vento che scuoteva violentemente le piante, e da' rivi, e torrenti che allora turgidi d' acque, e al basso precipitanti frangevano con istrepito contro que' moltiplicati dirupi. I tuoni, e i lampi proseguendo ad esser frequenti, mi determinai d' intraprendere qualche riflessiva osservazione su di essi, la qual cosa non mi fu conceduta di fare quando io era in mezzo al temporale, per la qualche paura, il confesso, che allora mi prese. Sopra tutto stava attento per vedere come producevasi il lampo, se da un' elettrica scintilla lanciantesi da un nuvolo nell' altro vicino, come vogliono i più de' moderni Fisici, allorchè il primo abbonda di elettricità, e ne scarseggia il secondo. Ma nulla in ciò di preciso, nulla di distinto mi fu dato di poter vedere, per formare quell' immenso aggregato di vapori un tutto unito, e come un nuvolo solo. A volta a volta vedeva soltanto rompere dal seno di que' vapori una capace scintilla, ora semplice, or divisa in più rami, che in un attimo scorreva un amplissimo spazio, e per lo più non diritta, ma a varj angoli, e a svolte composta, o a *zigzac* come direbbono i Francesi, e perciò similissima alle elettriche scintille che schizzano da una macchina assai poderosa. Un momento appresso mi feriva l' orecchio il romore del tuono, o piuttosto del fulmine, ma questi fulmini che ad ogni balenar di scintilla scoppiavano, erano piuttosto piccioli. Per un quarto d' ora fui tacito ammiratore giulivo di quella scena, che andò a finire col dileguarsi a poco a poco, e svanire le sottocorrenti nuvole, per cui la prossima Cisa, e i circonvicini luoghi d'invisibili che mi si rendevano prima, mi apparirono tutti svelatamente. Alle cose fin qui notate ne debbo aggiugner tre altre, l' una che durante il temporale in que' siti più bassi era colassù il vento sommamente rimesso, l' altra che minore sentivasi il freddo, mentre il termometro che nel luogo del temporale marcava, come già dissi, il grado $7\frac{1}{4}$, su quella cima era asceso all' om-

bra al grado 12: la terza che la nebbia non vaporosa, quella che è il precipuo soggetto di questo paragrafo, tanto su quella eminenza, che nei monti meno alti dove era piovuto, si osservava la stessa, ciò a dire l' aere appariva caliginoso in guisa, che quantunque non togliesse la vista de' lontani paesi, la rendeva però molto offuscata. Ed un simile offuscamento mi si diede pure a vedere quando lasciata la Cisa, e travalicato l' Appennino giunsi a Pontremoli, e il giorno appresso alla Spezia. Medesimamente non ne andava esente quel golfo, e il mare Ligustico. Sebbene a poco a poco andossi perdendo, e verso li 5 di Agosto non restava di quella nebbia più apparenza, più ombra. Durante poi il mio soggiorno a Portovenere, e in quelle vicinanze, ricomparve due volte, l' una al nascere d' un libeccio, l' altra d' un scirocco, ma tutte e due le volte su assai rara, e di breve durata.

Questi sono que' pochi fenomeni relativi a questa straordinaria meteora, che nel tempo ch' io m' occupava in altri oggetti ho potuto osservare. Voi non ignorate probabilmente l' ipotesi pubblicata intorno alla sua origine dal Sig. *Toaldo*, il quale opina che sia stata una conseguenza de' tremuoti della Calabria, in quanto che dopo quelle violentissime e diuturne scosse siccome è stata osservata in quegli sfortunati paesi una foltissima nebbia cagionata probabilmente da un corpo immenso di esalazioni sprigionatesi allora dall' interno della terra, e sollevatesi nell' atmosfera, così questa nebbia col favore de' venti è stata portata dentro a questo nostro cielo Lombardo. Tale ipotesi viene appoggiata a due ragioni principali, l' una che nel tempo della maggior densità di quella nebbia presso di noi dominavano appunto i venti austro-sciroccali, che traversato aveano quelle desolate contrade; l' altra che questa nebbia non toccava mai terra, ma era sempre alta, e perciò denotava esser venuta dall' alto, e come caduta nella nostra atmosfera.

Mi era già nota questa ipotesi prima di fare le osservazioncelle sopraddescritte, e a me parve allora non solo ingegnosa, ma anche plausibile ed appagante; e adesso che le ho fatte, non lascio neppur di pregiarla. Solamente il rinomato Autore di essa, mio grande Amico, potrà vedere, se mai si abbattesse

a leggere questi miei fogli, che qualche circostanza acccompagnante quella nebbia è alquanto diversa da quelle che sono state notate da lui. Così per atto d' esempio nella Lombardia Austriaca, e nella Modanese non era un vento austro-sciroccale, ma un ponente che dominava, quando l' aria di queste parti era sommamente caliginosa. Solamente una volta a Portovenere si offuscò all' insorgere del scirocco. Di più la nebbia di questi paesi non era soltanto in alto, come nel Padovano, dove soffiavano anche que' venti austro-sciroccali, siccome fu osservato dal mentovato Professore, ma toccava realmente la terra; e nei dirupi più profondi dell' Appennino appariva, come su detto, egualmente folta che nelle sue più elevate cime. Trovandomi nelle colline di Reggio ne' primi giorni di Luglio, quando cioè non erasi ancor diradata, instituii la seguente curiosa esperienza. All' aperto feci piantare in terra una capannuccia di sarmenti, fornita d' un piciol uscio, e per ogni banda serrata, a riserva d' un rotondo pertugio in alto, per dove poteva entrare un raggio di luce solare, che andava a ferire il suolo della picciola capanna. Lo scopo era se stando chiuso là dentro, e con gli occhi fisi alla parte del raggio rasente terra, io poteva vedere attraverso di esso la nebbia: la vidi di fatto, e meglio ancora sotto la lente, per cui attraverso del sole distingueva le particelle che la componevano, le quali non eran mica di forma globosa, come i palloncini o le vescichette vaporose, osservate sì bene dal chiarissimo Sig. *di Saussure*, ma per l' opposito avevano figura irregolare, e quale appunto suole esser quella delle esalazioni terrestri. Notai di più che tali particelle, almeno molte, uscivano dalla terra, e si sollevavano in alto. La qual' ultima circostanza, se stata fosse universale, avrebbe dato a credere che quella nebbia non era forestiera, ma locale. Ma io intorno all' origine di tal meteora non ardisco decidere, e lascierò a quel dottissimo mio Amico, e a voi il portare quel savio giudizio su queste mie passaggiere osservazioni, che verrà riputato più confacente alla verità.

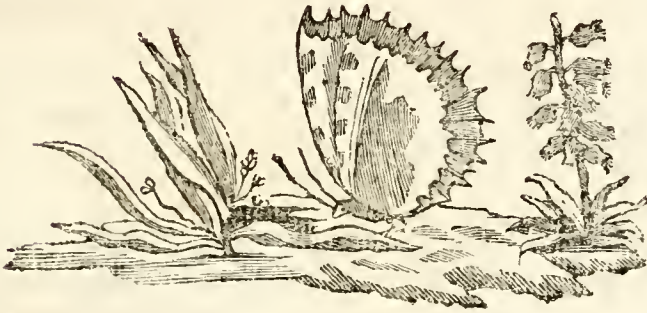
Prima di finir la Lettera non v' incresca ch' io aggiunga una parola su i temporali. Quando io mi trovava presso le Panie, rari eran que' giorni, che non ne insorgesse qualche-

duno

duno verso la loro sommità. Più volte appostatamente ho cercato che mi si rinnovasse la scena, che aperta mi si era sopra la Cisa, ma sempre inutilmente, posciachè giunto io a quelle cime, o il temporale era omai svanito, o si era recato altrove, o le nuvole temporalesche si erano sollevate a segno che più non toccavano la montagna. Privo di questo spettacolo, non me ne mancò un altro analogo, che non lasciava esso pure di avere il suo istruttivo, il suo bello. Riguardava esso la formazione dei temporali. Verso la metà del mattino su quelle nude roccie aridissime cominciavano qua e là ad apparire a non molta lontananza dal dosso dell' Alpe piccioli ammassi di vapori, a somiglianza di fumi. Talvolta sembravano riposar su la terra, e tale altra erano da essa alquanto sollevati, e pendenti in aria. Questi ammassamenti vaporosi venivano accresciuti in numero da altri di fresco prodotti o appariti. Il loro moto in generale soleva esser lentissimo, e quello di ascendere. Via via che ascendevano, facevansi di maggior corpo, quantunque però taluno o calasse di mole, od anche del tutto svanisse. L' aggrandimento nel volume era cagione che fra loro si avvicinasser di più, e che in progresso di tempo arrivassero anche a toccarsi. Quindi dopo qualche ora, e spesso verso il mezzodì, o poco più tardi que' piccioli aggregamenti di vapori insieme unitisi venivano a formarne un solo grandissimo. Allora la nuvola (che così chiamerò quell' aggregato totale di vapori) con le sue parti più alte cominciava a soprastare alla cima delle Panie, e queste parti che rappresentavano varie e bizzarre figure, erano sempre bianchissime, per essere investite da' raggi solari, quando l' altre sottostanti apparivan nere oppur bigie, per la maggiore o minor privazione di luce. Intanto la nuvola si faceva più estesa e più densa, varj ondeggiamenti, e moti vertiginosi a somiglianza d' un aspo nascevano dentro di lei, e cominciava ella ben tosto a lampeggiare, e a tuonare. Era regola ch' io non ho mai trovata soggetta a eccezioni, che su le prime quando il temporale era nascente, le scintille elettriche eran cortissime, e brevissimi, e picciolissimi i tuoni. In ragione poi che cresceva il temporale, quelle si facevan più lunghe, e questi più romorosi, e di maggiore durata. Aggranditosi così il temporale, cominciava a versar ac-

qua o gragnuola, ed ora esso finiva su que' deserti, dove era nato, ora abbandonate le Panie venía dal vento recato sopra altri paesi. Sebbene questo vento pareva che avesse la primaria sua origine dalla nube temporalesca. Quantunque, come ho già detto, io non abbia mai avuto il piacere di trovarmi su le Panie dentro al temporale, mi sono però abbattuto più d' una volta a' suoi lembi, e quivi il vento soffiava gagliardamente, e aveva tutte le apparenze di venir proprio dal seno della nuvola tempestosa. Osservava di più che sciogliersi questa, oppure allontanatasi, quello altresì andava a finire. E queste sono alcune delle principali circostanze che viaggiando io nelle Panie ho veduto accompagnare la formazione di que' frequentissimi temporali. Ma altrove io vi vi parlerò forse di altre mie osservazioni relative a un tal genere di meteore, e allora non lascierò di sottoporre al lucidissimo vostro intendimento alcune mie filosofiche congetture, da me ora taciute, null' altro essendomi io proposto nel ragionare dei temporali che il far le parti di semplice Storico.

Ma è tempo ch' io termini questa seconda mia Lettera. Nella prima, che ebbi già il compiacimento di scrivervi, m' ingegnai di abbozzarvi un compendio delle cose più principali da me osservate sul mare. In questa seconda voi lo avete di quelle, che ho esaminate su i monti. Quando le circostanze mel permetteranno proccurerò nella mia Opera di sviluppare tutte queste materie, e di corredarle delle necessarie pruove, bene spesso soppresse in queste due Lettere, per servire alla brevità. Dalla promessa Opera comprenderete anche meglio che dalle due Lettere, che in questo viaggio, nel quale sono stati da me impiegati tre mesi compiuti, non ho al certo risparmiato fatiche, nè sudori, e dirò anche danaro, stato non essendo indifferente un tal viaggio alle limitate finanze d' un Filosofo. Ciò nondimanco ove queste mie fatiche vengano coronate dall' approvazion vostra, e di quella del Pubblico, io mi terrò contentissimo, e questa avrà luogo presso di me della più splendida ricompensa. Oltre il sincero desiderio di apportare in questa occasione qualche utilità alla scienza che professo, ho cercato di non essere infruttuoso al Regio Imperiale Museo di Pavia, cui ho l' onore di presedere, coll'

arricchirlo di più esemplari di tutte quelle naturali produzioni, sì marine, che terrestri, le quali sono state il soggetto di queste due Lettere. Tali esemplari in questo pubblico onorevolissimo Luogo esistenti, ed ostensibili a chichessia procaccieranno anche maggior credenza alle cose fin qui narrate.

APPENDICE

ALLA MEMORIA

Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale, e sopra quelli di Pietra-Mala *in particolare.*

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nell' Università di Pavia.

HO avuto occasione in un giro da me fatto lo scorso Maggio in compagnia d'altre dotte persone, e delle naturali cose singolarmente studiose (*a*), di osservare le fiamme d' un altro terreno ardente; le quali ho riconosciuto essere dell' istessa natura delle già descritte di Pietra-mala, e subire le stesse vicende: cioè null' altro essere, che aria infiammabile sorgente copiosamente in alto attraverso una terra secca, e screpolata, sprovveduta di qualsisia bitume. Questo terreno ardente si trova alcune centinaja di passi solamente lontano dalla famosa città di *Velleja* già da molti secoli sepolta, e scopertasi ha pochi anni nelle montagne del Piacentino (*b*). Siccome a quello di Pietra-mala, così pure a questo di *Velleja* si dà nome molto impropriamente di vulcano: ciò che potrebbe farlo incolpare dell' eccidio di cotesta antica nobile città. E' però da osservarsi riguardo al primo, che non v'ha in tal luogo il minimo vestigio di eruzione, nè alcuna produzione vulcanica vi s' incontra; e riguardo alle rovine, la semplice ispezione locale ne

(*a*) Il Sig. Marchese Pompeo *Cusani*, Cavaliere nella sua fresca età ricco di cognizioni d'ogni genere; il Sig. Abate Don Carlo *Amoretti*, Secretario della Società Patriotica di Milano; e il Sig. Canonico Don Gio: Serafino *Volta*, Custode del Museo di Storia Naturale della R. I. Università di Pavia.

(*b*) Del 1757 vi è stata trovata a caso la celebre *Tavola Trajana*; e negli anni susseguenti furono intrapresi gli scavi, che hanno scoperto buona parte della città, un circo ecc.

mostra che un pezzo di montagna argillosa, come son tutte quelle che ivi sovrastano, soggette a smottare, lasciatasi giù d' improvviso, oppur anche successivamente, ha riempiuto di terra e coperto la città in un colle vicinanze. Simili frane o scoscendimenti di terra sono frequentissimi in tutta quella catena di montagne argillose o margacee, e chiamansi dagli abitanti *libie* o *lavine*. Se ne veggono qua e là di recenti, e vestigi ne rimangon dappertutto. Ci fu anzi mostrato un luogo distante men di due miglia da Velleja medesima, dove rimaser sepolte, non son che tre o quattr' anni, alcune case. Or sul luogo propriamente della città anch' essa sepolta trovasi un ampio rialzo di terreno, che non siegue l' andamento dell' altre montagne, ma è gettato di traverso, e che dechina verso un torrente chiamato *Chero*. Il sito delle fiamme trovasi verso il fine di questa china, direttamente sotto Velleja, e assai vicino al nominato torrente.

Non posso a meno di far qui una riflessione. Parlando dei fuochi di Pietra-mala affatto simili a questi, e convenendo aver ricorso a qualche supposizione per intendere come tant' aria infiammabile potesse colà trovarsi raccolta in vaste cavità sotterranee, quanta se ne ricerca per somministrar l' alimento continuo a tali fiamme, la prima idea che mi venne alla mente, e che proposi per la prima, fu quella di una palude e di un ammasso qualunque di sostanze vegetabili od animali, rimasto sepolto per una di quelle rivoluzioni, che è facile, io dicea, d' immaginare: il disfacimento delle quali sostanze sepolte sappiamo qual prodigiosa quantità d' aria infiammabile produce. Or qui per il terreno ardente di Velleja una tal rivoluzione non ho più bisogno di proporla indovinando, non è supposizione o congettura, ma fatto certo, di cui esiste un monumento pur troppo parlante.

Eran due i luoghi, da cui s' alzavan le fiamme, e fiamme ben alte e veementi, quando noi li visitammo; un vicinissimo al torrente, l' altro alcuni passi più in su; quello piuttosto ristretto, questo considerabilmente più ampio. Ci disser le persone che seguivano accompagnandoci, tralle quali il Parroco del luogo, uomo di molta intelligenza nè ignaro di Fisica, che non sempre ardono ambedue, sendo soggetti a spegnersi, singolarmente il più picciolo; ma che si riaccen-

don tosto al gettarvi sopra un solfanello, un mazzetto di paglia, o qualsivoglia altro corpo acceso; che il vento piuttosto che la pioggia li spegne; che questa anzi d' ordinario fa sorger le fiamme più alte; finalmente che il più picciolo di quei terreni ardenti, che è più abbasso, rimane soventi volte coperto d' acqua; e che allora sorgon da essa copiosissimi gorgogli, che la fan tutta ribollire, sebben si senta fredda tuffandovi la mano, come ogn' altr' acqua. Tali gorgogli, ci diceva il nostro bravo Curato, sono gorgogli d' aria, che si può con un cerino infiammare a pelo dell' acqua medesima, e si può anche raccoglierla in vesciche per mezzo d' un imbuto, com' egli asseriva aver praticato più d' una volta, ed accenderla quindi a bell' agio spingendola contro la fiamma di una candela. Tanta è la copia, soggiungeva, di quest' aria che scappa fuori dall' acqua, ch' io vorrei provarmi a riempirne un pallone aerostatico, se l' avessi, sicuro di riuscirci in poco d' ora.

Troppo ci avean detto, perchè dubbio più rimaner potesse intorno alla natura di questi fuochi. Ma anche prima di tal relazione da quel poco ch' io aveva sentito raccontarne in confuso, e dall' esempio di quelli di Pietra-mala, era più che persuaso che procedevano anche questi da null' altro che da aria infiammabile, cui per raccogliere aveva portato meco da Pavia e boccie e imbuti. Aveva anzi di più prevenuto i compagni di ciò che avremmo sicuramente veduto; un de' quali pareva tuttavia più inclinato a credere, che tali fiamme traessero il loro alimento immediatamente o mediatamente almeno da qualche vena di petrolio, tantochè si prometteva quasi di poter raccoglierne in sostanza, o di ricavare almeno della terra pregna di simil bitume.

La prima cosa che proposi di fare, dopo ch' avemmo data un' occhiata alle fiamme, e veduto che eran rossigne (tali appariano per lo splendor vivissimo del sole che vi dava addosso), senza fumo o fuliggine sensibile, e che tramandavano appena un leggerissimo odore, il quale non si potea neppur dire oleoso, la prima cosa, dico, che fu proposta e fatta ad oggetto di verificare le mie idee, è stata quella di allagare uno dei terreni ardenti. Si scelse per ciò fare più comodamente e più presto il men grande; si cavò alquanto di

terra; e vi si versarono alcuni secchj d' acqua. Questo bastò ad estinguere le fiamme in tutto il sito allagato; ma non a togliere l' eruzione spontanea copiosa dell' aria, la quale salendo attraverso l' acqua medesima in grossi e frequenti gorgogli ribollir la faceva in varj siti. Allora io feci vedere a tutti, come presentando un candelino acceso alle bolle che si presentavano a galla dell' acqua, tutte vi prendean fiamma. Questa fiamma non durava, è vero, nè si estendeva su tutta la superficie dell' acqua, come avviene in altre fontane ardenti, e come succede talora anche quivi, per la ragione ch' erano i gorgogli, sebben copiosi, come s' è detto, troppo ancora distanti un dall' altro, e che varj soffrivano delle interruzioni o pause: e ciò nasceva da che al primo inzupparsi del terreno molti screpoli e fessure avean dovuto chiudersi, ond' era l' aria sgorgante prima in piena copia rattenuta ora in gran parte. Il trovarsi per tal modo chiuse o ingorgate sul fondo del nostro laghetto molte vie all' aria, faceva che tutt' intorno sul labbro ancor secco o appena tocco dall' acqua uscisse essa aria con maggior impeto, e fischiando. Intanto noi facevam versare nuov' acqua, onde soffocare in parte anche questi getti, tantochè allagato più ampiamente il terreno, non avea ormai più l' aria altra strada che quella di uscir su per il terren bagnato e attraversar l' acqua. Infatti andavan mano mano crescendo i gorgogli in vigore e in frequenza, e per qualche larga via apertasi infine stabilmente sul fondo eran già divenuti parecchi non più interrotti e vaganti, ma continui e permanenti. Di maniera che non v' ha dubbio, che durando più lungo tempo a covarvi sopra l' acqua, veduto avremmo sortirne le bolle d' aria in quella strabocchevole copia, che al riferire del nostro valente Parroco vi si osserva negli allagamenti portativi talora dalle pioggie; e avremmo potuto diffondere col candelino la fiamma su tutta o quasi tutta la superficie dell' acqua. Ma se non era così copiosa l' uscita spontanea dell' aria da dare questo bello spettacolo, lo era abbastanza perchè potessimo riempirne a talento, siccome fu fatto, le nostre boccie: una delle quali feci vedere ad accenderla un' ora dopo, essendo di là partiti; le altre ben custodite me le recai a Pavia ad oggetto di esaminar quell' aria a più bell' agio, e con mag-

gior attenzione. Avrei desiderato per compimento, e per dare un bello spettacolo sul luogo, di avere un imbuto di ferro assai largo con canna stretta ed alta; perchè coprendo con questo le fiamme del terreno ancora asciutto, ciò che spente le avrebbe, avrei messo fuoco col candelino all'aria sulla cima del cannello, da cui uscendo essa affollata con impeto formato avrebbe un altissimo e vaghissimo getto di fiamma.

Quello de' compagni, cui le sperienze mie comunque decisive non finivan di appagare, perchè prevenuto per il suo petrolio, faceva intanto scavare d' attorno, e incontrata una terra nericcia, credette aver trovato quel che cercava, e senza neppur esitare, ci mostrò detta terra come pregna di un tal bitume. L' odore già era per lui di vero petrolio, agli altri sembrava pure che annunciasse qualche cosa di simile; a me pareva, e non pareva. Si ebbe dunque cura di raccogliere varj pezzi di questa terra nera d' attorno all' un sito e all' altro dove ardevan le fiamme, e a diversa profondità, per quindi analizzarla. Ma quale sorpresa poi quando fu trovato, che gettata sui vivi carboni punto non metteva fiamma? E come rimase più sorpreso ancora il nostro Mineralogo, quando sottoposta avendola alla distillazione, presenti noi tutti che fummo compagni nel viaggio, non passò neppur una goccia di olio? Ecco quali furono i prodotti di 6 oncie di tal terra: 1.° dan. $4\frac{1}{2}$ di acqua limpida con un odore accostantesi a quello dell' acido marino. 2.° dan. 7 di acqua simile con un poco di odore empireumatico. Nè l' una nè l' altra fece effervescenza cogli acidi. 3.° dan. 2 di flemma gialliccia con odore empireumatico più forte. Effervescenza cogli acidi. 4.° $\frac{1}{2}$ dan. di spirito volatile acquoso ed empireumatico: effervescenza più forte. 5.° rimasero in fine nella storta oncie 4 dan. 17. di terra nera abbruciata solubile in parte nell' acqua forte. Vi furono 17 dan. di perdita, non essendosi raccolti i prodotti aeriformi, che debbono essere stati in parte aria fissa, e in parte aria infiammabile. E' notabile, che prodotti poco dissimili ebbe il Sig. Baron *Dietrich* dalla terra nera da lui raccolta intorno ai fuochi di Pietra-mala (*a*); e già io

(*a*) *Lettres sur la Mineralogie ecc.* pag. 421.

credo che non molto diversi si ottengano da ogni terra grassa.

Poniamo ora il caso che quella nostra terra di Velleja avesse realmente fornito del petrolio, in vece che non ne ha dato nè punto nè poco, certo i suoi sautori, i sostenitori dell' antica comune sentenza avrebber menato festa, avrebbero se non relegata del tutto la mia aria infiammabile, poichè la so vedere e toccare, l'avrebbero lasciata in disparte, poco o nulla concesso avrebbero a quella, e tutto al diletto loro bitume: senza forse cercare se tale terra ne conteneva abbastanza per somministrar l'alimento alle fiamme di cui si tratta; senza troppo badare se dette fiamme rassomiglino a quelle del petrolio, o piuttosto a quelle della mia aria infiammabile. Io però avrei fatto loro rimarcare, che nel luogo medesimo ove ardon le fiamme, non si trova neppure la detta terra nera, bensì una terra arida e secca mezzo calcinata; che quelle fiamme non dan fumo nè fuliggine sensibile, e quasi nulla di odore, quando all' incontro il petrolio, siccome ogn' altro bitume, produce fiamma molto fuligginosa e fetente. Dovendo pertanto convenire che non può essere il petrolio in sostanza che bruci a fior di terra, o entro la medesima, sarebber ricorsi ai vapori di esso provenienti da maggiore profondità. Ma è forse il petrolio volatile come gli olj essenziali delle piante? Anzi no. E poi o questi vapori sono condensabili, e rimaner dovrebbero nell' acqua quando vien allagato il terreno che li tramanda, e soprannuotarvi offerendoci uno strato di petrolio, il che non si osserva; o non sono condensabili, ma permanentemente elastici, tal che scappano dall' acqua in forma di gallozzole, che è quello che si osserva di fatto; ed ecco, ripiglio, un vero fluido aeriforme, ecco la mia aria infiammabile. E che m' importa in fondo, quando è provato che ivi esiste, e ch' è dessa che arde, d' onde provenga? Io stesso non ho attribuito sempre l' origine dell' aria infiammabile, che chiamo nativa, alla lenta decomposizione delle sostanze vegetabili ed animali, di que' corpi insomma da' quali anche per distillazione si ricava una

ſimile aria (*a*)? Tra queſti corpi ſon certamente gli olj e i bitumi. Che anzi opino eſſere appunto la parte oleoſa delle anzidette ſoſtanze vegetabili ed animali o la ſola o la principale che forniſce tanto col proceſſo naturale quanto coll' artificiale l' aria di cui ſi tratta. Non eſcludo io dunque il petrolio: eſſo, come gli altri olj, come ogn' altra ſoſtanza infiammabile può decomponendoſi produrre aria infiammabile; e quando quella, che ſi trova in quantità ſtrabocchevole ſotto i terreni ardenti di Pietra-mala, e ſotto quelli di Velleja, di che non v' è più luogo a dubitare, foſſe così prodotta, vorrebbe dirſi per queſto che è petrolio quel che ivi arde e fiammeggia? A queſta maniera quando io accendo l' aria che proviene da uno ſtagno, ſul cui fondo trovanſi legni ed erbe infradiciate che l' han prodotta, potreſte dire che ſono i legni e l' erbe che dan la fiamma che vi fo vedere; ma chi ha ſano ſenſo, chi non ama la confuſione, diſtinguerà l' ardere immediato di tali corpi, e l' ardere dell' aria infiammabile già eſtratta da eſſi e raccolta a parte.

Così avrei incalzato queſtionando i partigiani del petrolio, ſe foſſe loro riuſcito d' incontrarne ne' luoghi de' terreni ardenti, o lì preſſo; ma dubito che ſi foſſero ancora arreſi, tanto può una preconcetta opinione. Ora però che per quanto ſi ſia cercato non ſe n' è rinvenuto punto nè poco, è finita ogni quiſtione, e la cauſa della mia aria infiammabile, che mi ſi dà vinta dal compagno ormai convertito, dovrà finalmente trionfare di quanti aderenti poſſano ancora trovarſi all' antica opinione.

Ho detto ch' io mi proponeva di eſaminare più attentamente ritornato a caſa l' aria infiammabile raccolta ſopra il terreno ardente di Velleja: or ſia pregio dell' opera il qui eſporre brevemente quello che ho trovato. Queſt' aria dunque arde con una fiamma lambente azzurrognola, un po' più chiara e più grande però di quella che dà ordinariamente l' aria cavata dai fondi d' acqua ſtagnante. Come queſta, e forſe più, è dura ad accenderſi colla ſcintilla elettrica; e com'

(*a*) Vegganſi le mie *Lettere ſull' aria infiammabile nativa delle paludi*, e le note all' articolo Aria infiammabile nel Dizionario di Chimica del Sig. *Macquer* tradotto dal Sig. *Scopoli*.

essa vuol esser mista per lo meno a otto volte tanto d' aria atmosferica. Non manda odore sensibilmente diverso da quello dell' aria infiammabile dei fossi; bensì dà qualche poco di fuliggine, che questa non dà. Per tale proprietà, e per quella della fiamma più chiara e più grande s' accosta un poco all' aria infiammabile che si ricava colla distillazione sia dagli olj puri, sia dalle sostanze vegetabili ed animali. Intorno a che se si riflette come l' aria infiammabile medesima della distillazione, la quale ha un puzzo empireumatico insopportabile ed è estremamente fuligginosa, va perdendo di quel puzzo e di quella fuligginosità a misura che si lava e si sbatte nell' acqua, come ho scoperto, accostandosi sempre più anche pel colore della fiamma all' aria nativa delle paludi, che è prodotta da una lenta e spontanea decomposizione delle medesime sostanze; se si riflette, dico, a ciò si verrà a comprendere che non differiscono sostanzialmente tra loro queste arie, e che quella del nostro terreno ardente già molto più vicina all' aria nativa delle paludi che all' altra della distillazione, se avesse come la prima i suoi natali e la culla nell' acqua, terrebbe con essa una perfetta rassomiglianza; e che l' acquisterebbe fors' anche dopo, ove sol le toccasse di soggiornare sott' acqua lungo tempo.

FINE *del Tomo Secondo.*

AVVERTIMENTO.

LE Tavole disegnate per la Parte I. debbono collocarsi unite in fine del I. Volume di questo II. Tomo coll' ordîne delle pagine chiamate in testa, e quelle della Parte II. in fine del II. Volume; e la Tavola contrassegnata per la Parte I. e II. è comune ad entrambi i Volumi, e va messa in calce d' ambidue.

Fig: V
A
C
B
R
M
r
R'
P'
P
V
Z
F
R

BONATI Tom: II pag: 676
I L M B
C
F
G
D
H
K
E
V
A
E
Fig: II
C
D
F
M
B
N
I
H
G
K
L

g: III
E
G
B
R
V
D
S
D
A
Fig: IV
B
E
C
I
Fig: V
B
F
C
E
D
G
N
A
M
H

Fig. III
Fig. V
Fig. VI
BONATI Tom: II pag: 676
Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V

Fig. VII
Fig: VIII
Fig: XV
Fig. XIV
Fig: XI
Fig: XII
Fig: XIII

Mem: della Società Italiana Tom. II pag. 676 BONATI
Parte II
Fig. VI
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. XV
Fig. XIV
Fig. X
Fig. XI
Fig. XII
Fig. XIII

Parte II

Fig·XVII

D F H C E I G B

D F E D

Tom:II pag:749

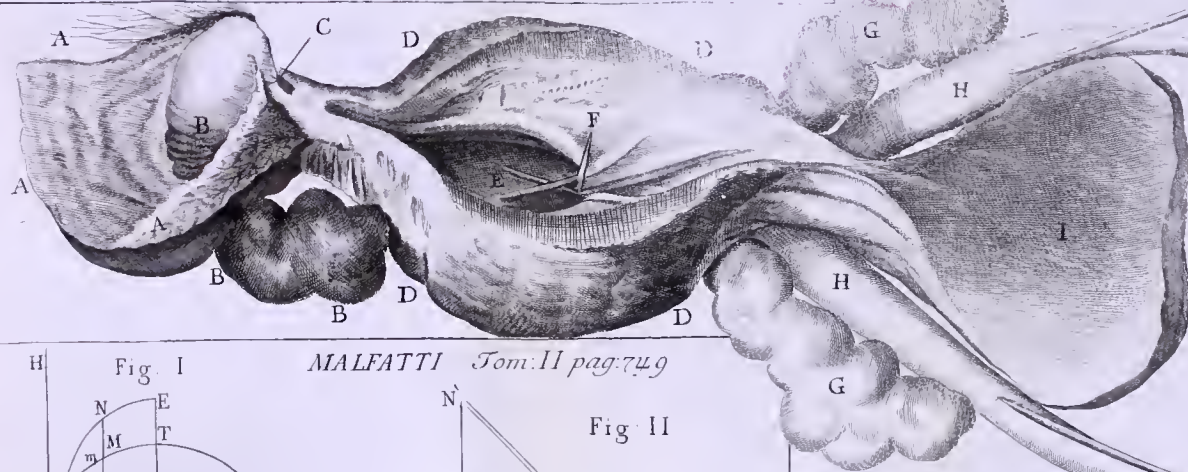
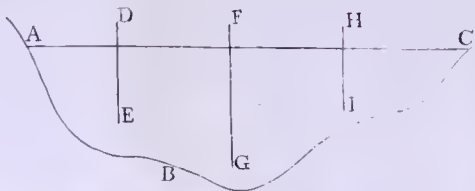
:II pag: 846

Fig: II

H G' N D m Q Q M G L I K Z P f V A C i H

BONATI

Fig: XVI

Fig: XVII

SCARPA Tom: II pag: 846

MALFATTI Tom: II pag: 749

Fig. I

Fig. II

Fig III

FONTANA
Parte I e II
m
M
r
g
O
Q
n
N
P
m
LORGNA Tom: II pag. 463
A
V
Fig: II
n
D
V'
V
M
A
Q
A'
c
d
b
B
N
R
D
T
B
V
P
S

T
m
M
r
g
Fig: XI
O
Q
S
n
N
P

B
m
Fig: I
LORGNA *Tom. II pag. 463*
P
V
A
n
C
P'
Fig: II
Q
D
V'
P
M
A
V
A'
B

Q
c
d
b
Fig: IV
N
R'
R
C
D
A
T
B
V'
V
P'
P
S